Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 2

Docenti: Giovanni Cerulli Irelli,
Marco Trevisiol

Da consegnare Martedi 12 Ottobre 2021

Esercizio 1. *Di ognuno dei seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^3$*, stabilire, motivando la risposta, se sono o meno un sottospazio vettoriale: (*$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$*)*

1. $\{X \in \mathbb{R}^3 | \, x_1 + x_2 - x_3 = 1\}$
2. $\{X \in \mathbb{R}^3 | \, x_1^2 + x_2^2 = 0\}$
3. $\{X \in \mathbb{R}^3 | \, x_1^2 + x_2 - x_3 = 0\}$
4. $\{X \in \mathbb{R}^3 | \, x_1 + x_2 - x_3 = 0, \, x_1 \geq 0\}$
5. $\{X \in \mathbb{R}^3 | \, x_1 \geq 0, \, x_2 + x_3 = 0\}$
6. $\{X \in \mathbb{R}^3 | \, x_1 x_2 x_3 = 0\}$
7. $\{X \in \mathbb{R}^3 | \, x_1 + x_2 - x_3 = 0, \, x_2 + x_3 = 0\}$
8. $\{X \in \mathbb{R}^3 | \, x_1 + x_2 - x_3 = 0, \, x_2 + x_3 = 1\}$

Per brevità utilizziamo la seguente notazione: scriviamo

$$U : \text{sistema lineare}$$

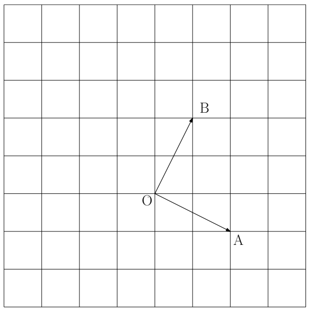
per intendere "U è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare".

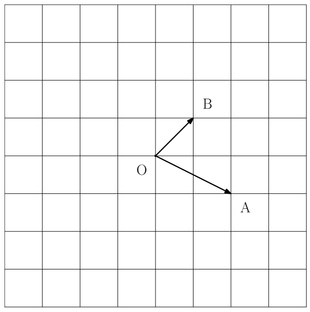
Esercizio 2. *Descrivere i seguenti insiemi in forma parametrica e dedurre che sono sottospazi vettoriali:*

1. *In* $\mathbb{R}^5$
$$U_1 : \begin{cases} 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 - 2x_5 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

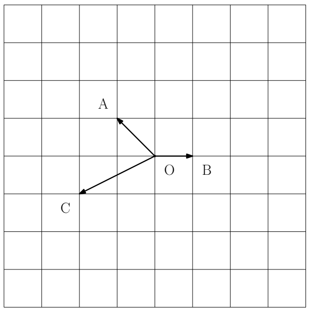
2. *In* $\mathbb{Q}^4$, *al variare di* $\lambda \in \mathbb{Q}$*:*
$$U_2 : \begin{cases} (\lambda - 1)x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0 \\ \lambda x_2 + (\lambda + 1)x_4 = 0 \\ x_1 + \lambda x_3 + x_4 = 0 \\ (\lambda - 1)x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$$

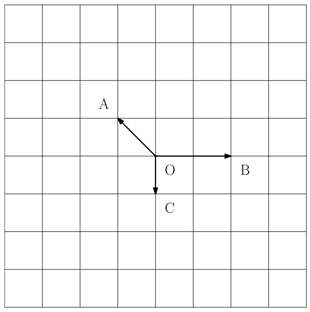
Esercizio 3. *1. Per le seguenti coppie di vettori geometrici $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ disegnare i vettori geometrici $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, $(-2)\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, $2\overrightarrow{OB}$.*

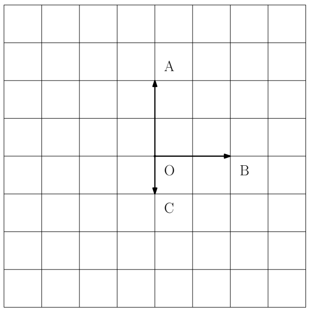


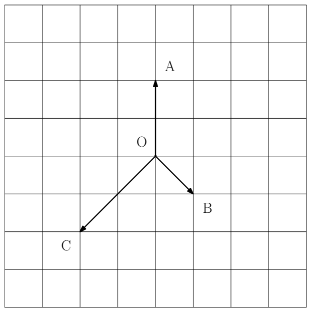


2. In ognuno dei seguenti casi, scrivere $\overrightarrow{OC}$ come combinazione lineare di $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.









Esercizio 4. *Dimostrare che le seguenti coppie di sottospazi U_1 e U_2 sono uguali.*

1. *In* $\mathbb{R}^4$, $U_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$, $U_2 = \langle e_1, e_3, e_4 \rangle$.
2. *In* $\mathbb{K}[x]$, $U_1 = \langle 1, 1-x, x-x^2, x^2-x^3 \rangle$, $U_2 = \mathbb{K}[x]_{\leq 3}$.
3. *In* $\mathbb{C}^4$, $U_1 = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle$, $U_2 = \mathbb{C}^4$.

Esercizio 5. *Determinare se l'insieme* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *è linearmente indipendente oppure linearemente dipendente in ognuno dei seguenti casi:*

1. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$;
2. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$;
3. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$;
4. $v_1 = 1 + x$, $v_2 = 1 + x - x^2$, $v_3 = 1 + x + x^3 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$;
5. $v_1 = \sin(x)$, $v_2 = \sin(2x)$, $v_3 = \sin(3x) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.