Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 8

Docenti: Giovanni Cerulli Irelli,
Marco Trevisiol

Da consegnare Martedi 23 Novembre 2021

Esercizio 1. *1. Studiare il seguente sistema lineare*

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 7x_4 + 6x_5 & = & 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 5x_5 & = & 1 \\ 6x_1 + x_2 + 7x_3 - 2x_4 + 3x_5 & = & 1 \end{cases}$$

2. Risolvere il seguente sistema lineare usando la formula di Cramer:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 & = & -2 \end{cases}$$

3. Studiare il seguente sistema lineare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + k(k-1)x_4 + (k+3)x_5 & = & 5-k \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + k(k-1)x_4 + (k+3)x_5 & = & 6 \\ 4x_1 + 8x_2 + x_3 + k(k-1)x_4 + (k+5)x_5 & = & 10 \end{cases}$$

Esercizio 2. *Calcolare l'inversa della seguente matrice in due modi diversi: prima usando la formula di Cramer e poi usando l'algoritmo di inversione. Qual è più veloce?*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ -2 & -3 & -3 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice dipendente dal parametro k:*

$$A(k) = \begin{pmatrix} 0 & k & k^2 \\ -k-1 & k-1 & 1-k \\ 1 & (k-1)^2 & k-1 \end{pmatrix}$$

Utilizzare il teorema degli orlati per trovare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali

1. $rg(A(k)) = 1$;
2. $rg(A(k)) = 2$;
3. $rg(A(k)) = 3$.

Esercizio 4.

1. *Sia* $V = \mathbb{K}[x]_{\leq 4}$ *e siano* $\lambda_1, \dots, \lambda_5 \in \mathbb{K}$. *Mostrare che i polinomi*

$$(x+\lambda_1)^4, \quad (x+\lambda_2)^4, \quad (x+\lambda_3)^4, \quad (x+\lambda_4)^4, \quad (x+\lambda_5)^4,$$

   sono linearmente indipendenti se e solo se $\lambda_i \neq \lambda_j$ *per ogni* $i \neq j$.

2. *Calcolare il polinomio interpolatore dei seguenti punti di* $\mathbb{R}^2$*:*

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   ovvero l'unico polinomio p *in* $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ *il cui grafico contenga tali punti. Fare un disegno indicativo.*

Esercizio 5. 1. *Sia T una matrice quadrata* triangolare superiore a blocchi, *ovvero avente la seguente decomposizione in blocchi* $T = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$.

Determinare T^2 utilizzando la moltiplicazione a blocchi.

Usare questo risultato per calcolare le potenze T^2, T^3, T^4 della matrice $T = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$. *Qual'è l'aspetto di T^n per $n \geq 1$?*

2. *Calcolare il prodotto AB a blocchi sapendo che:*

$$A = \left(\begin{array}{cc|ccc} -2 & 1 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 7 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 5 & -1 & -2 \\ 7 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

3. *Calcolare i seguenti prodotti a blocchi assumento che le ripartizioni siano compatibili rispetto al prodotto.*

- $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & X \\ -Y & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ Y & \mathbf{1} \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & X \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -X \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ Y \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} X & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ -X \end{pmatrix}$