Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 10

Docenti: Giovanni Cerulli Irelli,
Marco Trevisiol

Da consegnare Martedi 7 Dicembre 2021

Esercizio 1. *Sia $b(x, y)$ la seguente forma bilineare simmetrica di $\mathbb{R}^3$:*

$$b\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3) - 3(x_1 + x_2)(y_1 + y_2).$$

1. *Scrivere la matrice che rappresenta b nella base canonica di $\mathbb{R}^3$.*
2. *Scrivere la matrice che rappresenta b nella base*
$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right).$$
3. *Calcolare la segnatura di b.*
4. *Calcolare una base di Sylvester per b.*
5. *Dimostrare che i vettori isotropi di $(\mathbb{R}^3, b)$ giacciono in due piani di $\mathbb{R}^3$, quindi calcolarne le due equzioni cartesiane.*

Esercizio 2. *Stabilire quali delle seguenti matrici sono congruenti calcolando le segnature. Dunque, stabilire, per la forma bilineare su $\mathbb{R}^3$ associata a ciascuna matrice, se è definita positiva o negativa, semidefinita positiva o negativa o indefinita.*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
3. $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
5. $E = -D$.

Esercizio 3. *Dopo aver dimostrato che l'insieme $\mathcal{B}$ di vettori di seguito definiti forma una base di $\mathbb{R}^4$, calcolare una base ortonormale $\mathcal{B}'$ (rispetto al prodotto scalare standard) applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt a $\mathcal{B}$:*

$$\mathcal{B} = \left(v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Esercizio 4.

- *Sia* $q : V \to \mathbb{K}$ *la forma quadratica di una forma bilineare* $g : V \times V \to \mathbb{K}$ *su un* $\mathbb{K}$*-spazio vettoriale* V. *Dimostrare che*

$$g(X,Y) = \frac{1}{2}[q(X+Y) - q(X) - q(Y)]$$

per ogni $X, Y \in V$.

- *Per ciascuna delle seguenti forme quadratiche su* $\mathbb{R}^3$ *determinare la matrice associata nella base standard e trovare una base nella quale si scriva come combinazione lineare di quadrati.*

  1. $q(X) = x_1x_2$.
  2. $q(X) = -3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2$
  3. $q(X) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$

Esercizio 5. *Sia* $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. *Sia* $g : V \times V \to \mathbb{R}$ *la funzione data da*

$$g(A, B) = \mathrm{tr}(AB)$$

per $A, B \in V$.

1. *Dimostrare che* g *è simmetrica.*
2. *Dimostrare che* g *è bilineare.*
3. *Calcolare la matrice associata a* g *nella base standard* $\mathcal{C} = (e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2)$ *di* V.
4. *Calcolare la segnatura di* g. *Dedurre che* g *non è congruente alla usuale forma traccia* $\mathrm{tr}(A^t B)$.