Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 12

Docenti: Giovanni Cerulli Irelli,
Marco Trevisiol

Da consegnare Martedì 21 Dicembre 2021

Esercizio 1. 1. *Calcolare il volume del parallelepipedo di spigoli* $v_1 = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $v_2 = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $v_3 = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

Stabilire se la base (v_1, v_2, v_3) *ha la stessa orientazione di* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2. *Dimostrare che le due rette*

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle, \quad r_2 : \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x + y + 3z = 3 \end{cases}$$

sono sghembe. Trovare le equazioni parametriche e cartesiane del piano passante per r_2 *e parallelo ad* r_1. *Calcolare la distanza tra* r_1 *ed* r_2.

Esercizio 2. *Si considerino le rette affini di* $\mathbb{R}^3$ $r_1 = P_1 + \langle v_1 \rangle$ *e* $r_2 = P_2 + \langle v_2 \rangle$ *dove*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si consideri inoltre il punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. *Calcolare il prodotto vettoriale* $n = v_1 \wedge v_2$ *e la sua norma. Fare un disegno per illustrare verso e direzione di* n *rispetto a* v_1 *e* v_2.
2. *Calcolare l'area del triangolo di vertici* $0, v_1, v_2$.
3. *Stabilire la posizione reciproca di* r_1 *ed* r_2.
4. *Calcolare la distanza tra* r_1 *ed* r_2.
5. *Calcolare la matrice di proiezione ortogonale sul piano* $\langle v_1, v_2 \rangle$.
6. *Trovare una matrice* A *con le seguenti proprietà:* $AX = -3X$ *per ogni* $X \in \langle v_1, v_2 \rangle$ *e* $AY = 5Y$ *per ogni* $Y \in \langle v_1, v_2 \rangle^\perp$.

Esercizio 3. *Calcolare il polinomio caratteristico delle seguenti matrici:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verificare il risultato con MATLAB (il comando `charpoly` *restituisce i coefficienti del polinomio caratteristico).*

Esercizio 4. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. *Trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*

2. *Calcolare A^{10}.*

Esercizio 5. *Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice 3×3*

$$A_k = \begin{pmatrix} -k & -k & 1 \\ k-1 & k-1 & -1 \\ k+1 & k & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Trovare tutti i valori di k per i quali A_k è ortogonalmente diagonalizzabile.*
2. *Trovare tutti i valori di k per i quali A_k è diagonalizzabile.*
3. *Per i valori di k per i quali A_k è diagonalizzabile, trovare una base diagonalizzante $\mathcal{B}$, una matrice B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}A_kB = D$.*
4. *Per i valori di k per i quali A_k è diagonalizzabile, calcolare A^{2n} per ogni $n \geq 1$.*