

Nome, Cognome e Matricola

---

Esame scritto di Geometria 1  
Ingegneria Chimica  
Appello di Febbraio 2022  
Docenti: Giovanni Cerulli Irelli,  
Marco Trevisiol

14 febbraio 2022

**Esercizio 1.** In  $(\mathbb{R}^2, \cdot)$  consideriamo i due punti  $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $P_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

1. (1 punto) Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per  $P_1$  e  $P_2$ .
2. (1 punto) Trovare due punti  $P_3$  e  $P_4$  tali che il quadrilatero di vertici  $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$  sia un quadrato ed abbia il segmento  $\overline{P_1P_2}$  come diagonale.
3. (2 punti) Calcolare l'equazione cartesiana e parametrica della circonferenza  $\mathcal{C}$  inscritta nel quadrato trovato al punto precedente.
4. (3 punti) Sia  $\mathcal{C}(C, r)$  una qualunque circonferenza di centro  $C$  e raggio  $r$ . Dimostrare un teorema di Talete che dice che dato comunque un diametro  $\overline{Q_1Q_2}$  di  $\mathcal{C}(C, r)$  ed un punto  $P$  di  $\mathcal{C}(C, r)$  diverso da  $Q_1$  e  $Q_2$ , il triangolo di vertici  $Q_1, P$  e  $Q_2$  è rettangolo in  $P$ .

Fare un disegno che illustri la situazione.



**Esercizio 2.** In  $(\mathbb{R}^3, \cdot)$  si considerino  $n = (1, 2, 3)^t$  e  $P = (1, 2, -1)^t$ .

1. (2 punti) Calcolare le equazioni parametriche e cartesiane del piano  $\pi$  passante per  $P$  ed avente  $n$  come vettore normale.
2. (2 punti) Trovare equazioni parametriche e cartesiane della retta  $r$  ottenuta come intersezione di  $\pi$  con il piano  $\sigma : x + y + z = 1$ .
3. (2 punti) Calcolare la distanza di  $P$  da  $r$ .
4. (1 punto) Calcolare la proiezione ortogonale di  $P$  sul piano  $\sigma$ .



**Esercizio 3.** *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & 4 & -2 \\ -4 & 6 & 8 & -6 \end{pmatrix}$$

1. (2 punti) *Calcolare il polinomio caratteristico e lo spettro di  $A$ .*
2. (2 punti) *Calcolare una base di ogni autospazio di  $A$ .*
3. (1 punto) *Stabilire se gli autospazi di  $A$  sono ortogonali tra loro.*
4. (2 punti) *Stabilire se  $A$  è diagonalizzabile e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile  $B$  ed una matrice diagonale  $D$  tali che  $B^{-1}AB = D$ .*



**Esercizio 4.** *Consideriamo le seguenti matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. (1 punto) *Trovare una base  $\mathcal{B}_A$  di  $\text{Col}(A)$  ed una base  $\mathcal{B}_C$  di  $\text{Col}(C)$ .*
2. (1 punto) *Dimostrare che  $A$ ,  $C$  ed  $I$  sono simili.*
3. (1 punto) *Dimostrare che  $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_A \cup \mathcal{B}_C$  è una base di  $\mathbb{R}^4$ .*
4. (2 punti) *Trovare la matrice  $C'$  che rappresenta  $S_C$  nella base canonica in partenza e nella base  $\mathcal{B}_2$  in arrivo.*
5. (2 punti) *Trovare una base  $\mathcal{B}_1^A$  di  $\mathbb{R}^3$  ed una base  $\mathcal{B}_2^A$  di  $\mathbb{R}^4$  tali che la matrice che rappresenta  $S_A$  in queste basi sia la matrice  $I$ .*





**Esercizio 5.** *Al variare di  $a, b, c \in \mathbb{R}$  si consideri la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}.$$

1. (3 punti) *Trovare delle condizioni sui parametri affinché lo spettro di  $A$  sia reale.*
2. (1 punto) *Trovare una condizione sui parametri affinché la matrice  $A$  sia ortogonalmente diagonalizzabile.*
3. (3 punti) *Per i valori trovati al punto precedente trovare una base ortonormale di  $(\mathbb{R}^2, \cdot)$  composta di autovettori per  $A$ .*

