

Nome, Cognome e Matricola

Esame scritto di Geometria 1
Ingegneria Chimica
Appello di giugno 2022
Docenti: Giovanni Cerulli Irelli,
Marco Trevisiol

6 giugno 2022

Esercizio 1. In (\mathbb{R}^2, \cdot) consideriamo i punti $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $P_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. (2 punti) Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per P_1 e P_2 .
2. (2 punti) Trovare due punti distinti Q_1 e Q_2 tali che i triangoli $Q_1P_1P_2$ e $Q_2P_1P_2$ siano equilateri.
3. (1 punto) Dimostrare che esiste una circonferenza \mathcal{C} inscritta nel quadrilatero $Q_1P_1Q_2P_2$. Determinare il centro C ed il raggio r di \mathcal{C} .
4. (1 punto) Determinare l'equazione cartesiana di \mathcal{C} .
5. (1 punto) Sia $Q_\theta = C + rP_\theta$, dove $P_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)^t$, un punto della circonferenza \mathcal{C} . Disegnare Q_0 , $Q_{\pi/4}$ e $Q_{\pi/2}$. Stabilire i valori dell'angolo θ per i quali Q_θ appartiene ai lati del quadrilatero $Q_1P_1Q_2P_2$.

Fare un disegno (possibilmente usando riga e compasso) che illustri la situazione.

Esercizio 2. In (\mathbb{R}^3, \cdot) si considerino i quattro punti

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. (2 punti) Dimostrare che P_1 , P_2 e P_3 non sono allineati.
2. (2 punti) Trovare equazioni parametriche e cartesiane del piano π passante per P_1 , P_2 e P_3 .
3. (1 punto) Calcolare la matrice P_{π_0} di proiezione ortogonale sul sottospazio di giacitura π_0 di π .
4. (1 punto) Calcolare la distanza di Q da π .
5. (1 punto) Calcolare il volume della piramide avente come vertici P_1 , P_2 , P_3 e Q . (Può essere utile ricordare che il volume della piramide è base per altezza diviso tre.)

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) *Calcolare il determinante e la traccia di A .*
2. (1 punto) *Stabilire se A è invertibile e nel caso lo sia calcolare la sua inversa.*
3. (2 punti) *Calcolare il polinomio caratteristico di A .*
4. (3 punti) *Stabilire se A è diagonalizzabile su \mathbb{R} e nel caso lo sia trovare una base di autovettori.*

Esercizio 4. Siano $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ e $W = \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ gli spazio vettoriali reali dei polinomi di grado ≤ 2 e ≤ 4 a coefficienti reali, rispettivamente. Consideriamo la funzione $F : V \rightarrow W$ data da

$$F(p(x)) = p(x^2) - p(x).$$

1. (1 punto) Dimostrare che F è lineare.
2. (1 punto) Calcolare $F(x^2 - 1)$.
3. (2 punti) Scrivere la matrice associata ad F nelle basi standard.
4. (3 punti) Calcolare basi di nucleo ed immagine di F .

Esercizio 5. *Si consideri la seguente funzione bilineare in tre variabili reali*

$$b(X, Y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2.$$

1. (2 punti) *Scrivere la matrice A associata a b nella base standard di \mathbb{R}^3 .*
2. (2 punti) *Trovare una base ortogonale di (\mathbb{R}^3, b) .*
3. (1 punto) *Calcolare la segnatura di b .*
4. (1 punto) *Trovare una base di Sylvester associata a b .*
5. (1 punto) *Siano $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ i tre autovalori della matrice A trovata al punto 1. Stabilire se $\lambda_1\lambda_3 \geq 0$.*

