Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 3

Docenti: Giovanni Cerulli Irelli,
Marco Trevisiol

Da consegnare Martedì 19 Ottobre 2021

Esercizio 1. *1. Dimostrare che gli insiemi*

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

sono basi di $\mathbb{R}^2$*.*

2. Esprimere i seguenti vettori come combinazione lineare di ognuna delle basi $\mathcal{B}_1$*,* $\mathcal{B}_2$ *e* $\mathcal{B}_3$*:*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. *Sia* $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ *lo spazio vettoriale dei polinomi in una variabile* x *di grado al più tre e a coefficienti reali. Si considerino i seguenti insiemi*

$$\mathcal{B}_1 = \{1 - x, 1 + x, x + x^2, 2x - x^2 + 2x^3\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{1, x - 1, (x - 1)^2, (x - 1)^3\}.$$

e sia $p(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3$.

1. *Dimostrare che* $\mathcal{B}_1$ *e* $\mathcal{B}_2$ *sono basi di* V.
2. *Calcolare il vettore delle coordinate* $F_{\mathcal{B}_1}(p)$ *di* p *nella base* $\mathcal{B}_1$.
3. *Calcolare il vettore delle coordinate* $F_{\mathcal{B}_2}(p)$ *di* p *nella base* $\mathcal{B}_2$.

Esercizio 3. *Si considerino i seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^4$*:*

$$U : \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + \frac{2}{3}x_2 - x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases} \qquad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 \\ -17 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

1. *Dimostrare che* U *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^4$*.*
2. *Trovare una base di* U*.*
3. *Trovare una base di* $U \cap W$*.*
4. *Trovare una base di* $U + W$ *seguendo la dimostrazione della formula di Grassmann.*

Esercizio 4. *Siano*

$$U_1 : \begin{cases} x_1 + 2ix_2 = 0 \\ x_2 + 2ix_3 = 0 \end{cases} \quad e \quad U_2 : x_1 = -4x_3$$

due sottoinsiemi di $U_3 := \mathbb{C}^3$.

1. *Mostrare che* U_1 *e* U_2 *sono sottospazi vettoriali di* U_3 *e che* $U_1 \subseteq U_2$.
2. *Scegliere una base* $\mathcal{B}_1$ *di* U_1, *estenderla a una base* $\mathcal{B}_2$ *di* U_2, *quindi estenderla a una base* $\mathcal{B}_3$ *di* U_3.
3. *Scrivere esplicitamente le funzioni delle coordinate* $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_1}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_2}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_3}$.

Esercizio 5. *Per ogni scelta del parametro reale t, fissiamo i seguenti vettori in $\mathbb{R}^4$:*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-t \\ 2-2t \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1-t \\ 1-t \\ 1-t \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1-t \\ t-1 \\ 3t-3 \\ 1-t \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-t \\ 2-2t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poniamo $U_t = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $W_t = \langle v_3, v_4 \rangle$.

1. *Esiste un $t \in \mathbb{R}$ tale che $U_t + W_t = \mathbb{R}^4$?*
2. *Per quali $t \in \mathbb{R}$ si ha $\dim(U_t \cap W_t) = 1$?*
3. *Determinare una base di $U_0 \cap W_0$, quindi estenderla a una base di $\mathbb{R}^4$.*
4. *Esiste un sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ complementare sia a U_{-1} che a W_{-1}? Se sì, trovarne uno e dire se è unico.*