Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 5

Docenti: Giovanni Cerulli Irelli,
Marco Trevisiol

Da consegnare Martedi 02 Novembre 2021

Esercizio 1. *In ognuno dei seguenti casi, calcolare DA e AD'. Trovare la regola generale per determinare cosa succede ad una matrice A quando la si moltiplica a* sinistra *con una matrice diagonale D e quando la si moltiplica a* destra *con una matrice diagonale D'.*

1. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $D' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

2. $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $D' = 6\mathbf{1}_3$.

3. $D = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $D' = D$.

Esercizio 2. *In ciascuno dei seguenti casi dimostrare che l'affermazione è vera oppure scrivere un controesempio che permetta di stabilire che l'affermazione è falsa. In tutto l'esercizio A e B denotano due matrici.*

1. *Se AB è definita anche BA è definita.*
2. *Se $AB = BA$ allora A e B sono entrambe quadrate e hanno la stessa taglia.*
3. *Se A e B sono quadrate della stessa taglia allora $AB = BA$.*
4. *Se A ha una riga nulla allora anche AB ha una riga nulla.*
5. *Se A ha una colonna nulla allora anche AB ha una colonna nulla.*
6. *Se $AB = 0$ allora o $A = 0$ o $B = 0$.*
7. *L'uguaglianza $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ è sempre valida se A e B sono quadrate della stessa taglia.*
8. *Se $AB = A$ allora B è la matrice identità.*
9. *Se $AB = \mathbf{1}$ allora A è invertibile e B è l'inversa di A.*

Esercizio 3. *1. Trovare $A \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tale che $A^2 = -\mathbf{1}_2$.*

2. Si considerino le matrici $e_1 \otimes e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ed $e_1 \otimes e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Data una matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ calcolare $A(e_1 \otimes e_1)$, $(e_1 \otimes e_1)A$, $A(e_1 \otimes e_2)$, $(e_1 \otimes e_2)A$. Verificare il risultato con MATLAB.

3. Sia A una matrice di taglia 2×2 tale che $AB = BA$ per ogni B. Dimostrare che allora A è una matrice scalare *ovvero esiste uno scalare x tale che $A = x\mathbf{1}_2$.*

4. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Dimostrare la seguente uguaglianza di matrici:

$$A^2 - 4A + 5\mathbf{1}_2 = \mathbf{0}_{2\times 2}.$$

Esercizio 4. 1. *Descrivere tutte le possibili matrici* 2×2 *a scala ridotte.*

2. *Data una matrice* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *nei parametri reali* a, b, c, d, *trovare la sua forma a scala ridotta. (Ovviamente rref(A) dipende dalla scelta dei parametri, per cui bisogna considerare i diversi casi separatamente.)*

Esercizio 5. *Trovare la forma a scala ridotta di ognuna delle seguenti matrici e trovare le loro colonne dominanti. Verificare il risultato con MATLAB.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -6 & -2 & -4 & 5 & 3 & 8 \\ -2 & 2 & -4 & -3 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & -6 & 1 & -7 & 11 & 0 & 11 \\ -2 & 2 & -4 & 3 & -7 & 12 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$