

Nome, Cognome e Matricola

Esercitazione

22 Dicembre 2021

Esercizio 1. In (\mathbb{R}^2, \cdot) consideriamo i tre punti

$$P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. (1 punto) Dimostrare che i tre punti non sono allineati.
2. (3 punti) Calcolare le equazioni parametriche e cartesiane delle tre bisettrici del triangolo T di vertici P_1 , P_2 e P_3 .
3. (1 punto) Calcolare l'incentro I di T , ovvero l'intersezione delle tre bisettrici.
4. (2 punti) Trovare equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza \mathcal{C} inscritta in T ovvero la circonferenza interna tangente ai tre lati del triangolo.

Esercizio 2. Si considerino le seguenti due rette di \mathbb{R}^3 :

$$r_1 : \begin{cases} y - z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad e \quad r_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

1. (1 punto) Trovare una forma parametrica per r_1 ed una forma cartesiana per r_2 .
2. (1 punto) Determinare la posizione reciproca di r_1 ed r_2 .
3. (1 punto) Calcolare la distanza tra r_1 ed r_2 .
4. (2 punti) Determinare equazioni cartesiane per la retta r_3 avente le seguenti proprietà: 1) r_3 è ortogonale sia ad r_1 che a r_2 ; 2) r_3 interseca sia r_1 che r_2 .
5. (1 punto) Determinare i punti $P_1 = r_1 \cap r_3$ e $P_2 = r_2 \cap r_3$.
6. (1 punto) Sia $P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calcolare l'area del triangolo di vertici P_1, P_2 e P_3 . Fare un disegno illustrativo.
7. (1 punto) Sia $P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calcolare l'area del triangolo di vertici P_1, P_3 e P_4 . Fare un disegno illustrativo.

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & -3 & 3 \\ -1 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) *Calcolare il polinomio caratteristico di A .*
2. (1 punto) *Calcolare le molteplicità algebrica di ogni autovalore di A .*
3. (2 punti) *Calcolare le molteplicità geometrica di ogni autovalore di A .*
4. (3 punti) *Trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*

Esercizio 4. Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ dei polinomi di grado minore o uguale di 2. Denotiamo con $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$ la base standard di V . Si consideri l'insieme $\mathcal{B} = \{1 - x, 2 + x, x + x^2\}$.

1. (1 punto) Dimostrare che \mathcal{B} è una base di V .
2. (1 punto) Sia $T : V \rightarrow V$ l'unica applicazione lineare tale che

$$T(1 - x) = 1 + x + x^2, \quad T(2 + x) = 2 - x, \quad T(x + x^2) = 3x + 2x^2.$$

Scrivere la matrice A che rappresenta T nella base \mathcal{B} in partenza e nella base \mathcal{C} in arrivo.

3. (1 punto) Scrivere la matrice C che rappresenta T nella base \mathcal{C} (sia in partenza che in arrivo).
4. (1 punto) Trovare una base per $\text{Ker}(T)$.
5. (1 punto) Trovare una base per $\text{Im}(T)$.
6. (2 punti) Stabilire se esiste un polinomio non-nullo $p(x)$ tale che $T(p(x)) = p(x)$ e nel caso esista trovarne uno.

Esercizio 5. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. (1 punto) *Stabilire se il sistema $Ax = b$ sia risolubile.*
2. (2 punti) *Calcolare la matrice di proiezione ortogonale sull'immagine di A .*
3. (1 punto) *Calcolare la proiezione ortogonale b' di b sull'immagine di A .*
4. (1 punto) *Risolvere il sistema $Ax = b'$.*
5. (2 punti) *Calcolare la distanza di b da $\text{Im}(A)$.*

