Nome, Cognome e Matricola

Esame scritto di Geometria 1
Ingegneria per l'ambiente ed il territorio
Appello straordinario di Marzo 2022
Docenti: Giovanni Cerulli Irelli, Marco Trevisiol

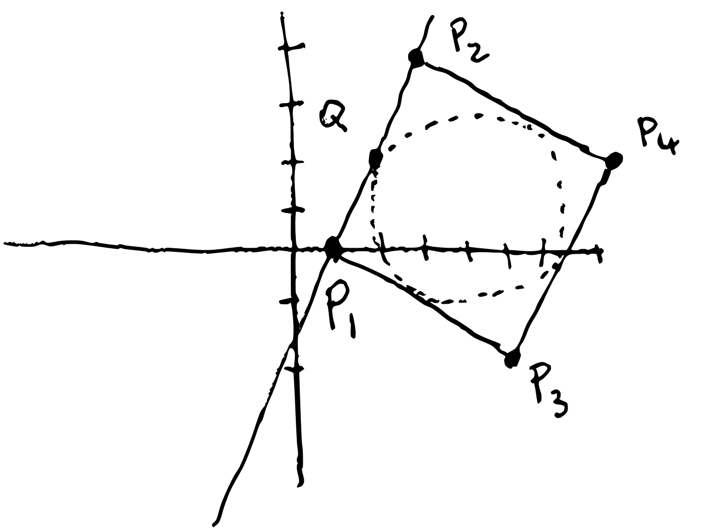
25 marzo 2022

2 ore

Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo il punto* $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

1. *(3 punti) Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per Q ed avente pendenza uguale a 2.*
2. *(2 punti) Trovare i due punti P_1 e P_2 di r che distano $\sqrt{5}$ da Q.*
3. *(3 punti) Trovare due punti P_3 e P_4 tali che il quadrilatero $P_1P_2P_3P_4$ sia un quadrato ed abbia P_1P_2 come lato.*
4. *(2 punti) Trovare le equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza iscritta nel quadrato trovato al punto precedente.*

Fare un disegno che illustri la situazione.



1) $r: \; y = 2x - 2$

$r = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

2) $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

3) $P_3 = P_1 + R_{-90°}(P_2 - P_1) = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

$P_4 = P_2 + R_{90°}(P_1 - P_2) = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

(Si potevano anche scegliere i punti simmetrici $P_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $P_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$)

4) Il centro è $C = \overline{P_1P_4} \cap \overline{P_2P_3} = \frac{P_1 + P_4}{2} = \frac{P_2 + P_3}{2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

ed il raggio è la metà del lato, quindi $r = \sqrt{5}$.

La circonferenza ha quindi eq. parametrica

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \sqrt{5} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta \in (0, 2\pi] \right\}$$

ed eq. cartesiana

$$(x-4)^2 + (y-1)^2 = 5.$$

Esercizio 2. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -12 & 10 & -14 & -42 \\ -2 & 0 & -2 & -6 \\ 12 & -12 & 17 & 48 \\ -1 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

1. *(2 punti) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
2. *(2 punti) Calcolare la traccia ed il determinante di A.*
3. *(1 punto) Calcolare lo spettro di A.*
4. *(5 punti) Stabilire se A è diagonalizzabile e nel caso lo sia trovare una matrice B invertibile ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*

1)

$$P_A(x) = \det \begin{pmatrix} x+12 & -10 & 14 & 42 \\ 2 & x & 2 & 6 \\ -12 & 12 & x-17 & -48 \\ 1 & -1 & 2 & x+5 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x+2 & -10 & 14 & 42 \\ x+2 & x & 2 & 6 \\ 0 & 12 & x-17 & -48 \\ 0 & -1 & 2 & x+5 \end{pmatrix}$$

$$= (x+2) \det \begin{pmatrix} 1 & -10 & 14 & 0 \\ 1 & x & 2 & 0 \\ 0 & 12 & x-17 & 3-3x \\ 0 & -1 & 2 & x-1 \end{pmatrix} = (x+2)(x-1) \det \begin{pmatrix} 1 & -10 & 14 & 0 \\ 1 & x & 2 & 0 \\ 0 & 12 & x-17 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (x+2)(x-1) \det \begin{pmatrix} 1 & -10 & 14 & 0 \\ 0 & x+10 & -12 & 0 \\ 0 & 9 & x-11 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (x+2)(x-1) \det \begin{pmatrix} x+10 & -12 \\ 9 & x-11 \end{pmatrix}$$

$$= (x+2)(x-1) \det \begin{pmatrix} x-2 & -12 \\ x-2 & x-11 \end{pmatrix} = (x+2)(x-1) \det \begin{pmatrix} x-2 & -12 \\ 0 & x+1 \end{pmatrix}$$

$= (x+2)(x-2)(x-1)(x+1)$ 2) $\mathrm{Tr}\, A = 0$, $\det A = P_A(0) = 4$

3) $\mathrm{Sp}\, A = \{-2, 2, 1, -1\}$. 4) $V_{-2}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $V_2(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$V_1(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $V_{-1}(A) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. *Si consideri il seguente sistema lineare nelle tre variabili reali x, y, z:*

$$\begin{cases} x + y + 2(k^2 - k + 1)z &= 7k \\ x + (k^2 - k + 1)z &= 4k \\ x - y - k(k-1)z &= 0 \end{cases}$$

1. *(1 punto) Scrivere la matrice dei coefficienti A del sistema.*
2. *(1 punto) Scrivere la matrice completa $(A|b)$ del sistema.*
3. *(2 punti) Trovare l'unica soluzione del sistema per $k = 2$ utilizzando la regola di Cramer.*
4. *(3 punti) Trovare tutti i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema è risolubile.*
5. *(3 punti) Per i valori di k per il quale il sistema è risolubile descrivere tutte le soluzioni.*

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2(k^2-k+1) \\ 1 & 0 & k^2-k+1 \\ 1 & -1 & -k(k-1) \end{pmatrix}$ 2) $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2(k^2-k+1) & 7k \\ 1 & 0 & k^2-k+1 & 4k \\ 1 & -1 & -k(k-1) & 0 \end{array}\right)$

3) $k=2$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} = 2$

L'unica soluzione è $X_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ dove

$x_1 = \dfrac{\det(b|A^2|A^3)}{\det A} = \dfrac{10}{2} = 5$; $x_2 = \dfrac{\det(A^1|b|A^3)}{\det A} = \dfrac{6}{2} = 3$;

$x_3 = \dfrac{\det(A^1|A^2|b)}{\det A} = \dfrac{2}{2} = 1$. Quindi $X_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2(k^2-k+1) & 7k \\ 1 & 0 & k^2-k+1 & 4k \\ 1 & -1 & -k^2+k & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & k^2-k+1 & 3k \\ 1 & 0 & k^2-k+1 & 4k \\ 1 & -1 & -k^2+k & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k^2-k+1 & 4k \\ 0 & 1 & k^2-k+1 & 3k \\ 0 & -1 & -2k^2+2k-1 & -4k \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k^2-k+1 & 4k \\ 0 & 1 & k^2-k+1 & 3k \\ 0 & 0 & -k^2+k & -k \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k^2-k+1 & 4k \\ 0 & 1 & k^2-k+1 & 3k \\ 0 & 0 & k(k-1) & k \end{array}\right)$$

Se $k(k-1) \neq 0$ il sistema ammette un'unica soluzione:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k^2-k+1 & 4k \\ 0 & 1 & k^2-k+1 & 3k \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k-1} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3k(k-1)-1}{k-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2k(k-1)-1}{k-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k-1} \end{array}\right)$$

ovvero $$\frac{1}{k-1} \begin{pmatrix} 3k(k-1)-1 \\ 2k(k-1)-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se $k=0$ il sistema ammette infinite soluzioni:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Se $k=1$ il sisteme non ammette soluzione.