Nome, Cognome e Matricola

Soluzione dell'esercizio 5 della settimana 3

21 Ottobre 2021

Esercizio: Per ogni scelta del parametro reale t, fissiamo i seguenti vettori in $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-t \\ 2-2t \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1-t \\ 1-t \\ 1-t \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1-t \\ t-1 \\ 3t-3 \\ 1-t \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-t \\ 2-2t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poniamo $U_t = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $W_t = \langle v_3, v_4 \rangle$.

1. Esiste un $t \in \mathbb{R}$ tale che $U_t + W_t = \mathbb{R}^4$?
2. Per quali $t \in \mathbb{R}$ si ha $\dim(U_t \cap W_t) = 1$?
3. Determinare una base di $U_0 \cap W_0$, quindi estenderla a una base di $\mathbb{R}^4$.
4. Trovare una base di $U_{-1} \cap W_{-1}$ estenderla ad una base di $U_{-1} + W_{-1}$ e poi trovare un complementare di $U_{-1} + W_{-1}$ in $\mathbb{R}^4$.
5. Esiste un sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ complementare sia a U_{-1} che a W_{-1}? Se sì, trovarne uno e dire se è unico.

Soluzione:

1. Se $t = 1$, $U_t + W_t$ non puó essere tutto $\mathbb{R}^4$, perchè la dimensione di U_1 è 1. Assumiamo che $t \neq 1$ e troviamo la forma a scala ridotta della matrice che ha per colonne v_1, v_2, v_3, v_4:

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1-t & -1-t & 2 \\ 1-t & 1-t & t-1 & 1-t \\ 2-2t & 1-t & 3t-3 & 2-2t \\ 0 & 1-t & 1-t & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = rref(A_t)$$

   quindi $2v_1 - v_2 + v_3 = 0$, per ogni $t \neq 1$. Ne segue che i quattro generatori di $U_t + W_t$ non sono linearmente indipendenti e quindi $dim(U_t + W_t) < 4$. Quindi la risposta è NO, non esiste nessun $t \in \mathbb{R}$ tale che $U_t + W_t = \mathbb{R}^4$.

2. Se $t = 1$, $U_1 = \langle e_1 \rangle$ e $W_1 = \langle e_1 \rangle$ e quindi $U_1 = W_1$ e $dim(U_1 \cap W_1) = 1$. Se $t \neq 1$, dal punto precedente sappiamo che $2v_1 - v_2 = -v_3$ e quindi $v_3 \in U_t \cap W_t$. Dato che $v_3 \neq 0$, ne segue che $dim(U_t \cap W_t) \geq 1$; se fosse due vorrebbe dire che $U_t = W_t$ il che è assurdo perchè v_4 non è una combinazione lineare di v_1 e v_2 e quindi non appartiene a U_t (se $t \neq 1$). Quindi la risposta è che per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha che $dim(U_t \cap W_t) = 1$.

3. Dal punto precedente sappiamo che $U_t \cap W_t = \langle v_3 \rangle$. In particolare una base di $U_0 \cap W_0$ è
$$\mathcal{B}_{U_0 \cap W_0} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
Per estenderla ad una base di $\mathbb{R}^4$ basta aggiungere e_1, e_2 ed e_3.

4.
$$\mathcal{B}_{U_{-1} \cap W_{-1}} = \left\{ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \to \mathcal{B}_{U_{-1}} = \left\{ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$
$$\to \mathcal{B}_{U_{-1} + W_{-1}} = \left\{ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \to$$
$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4} = \left\{ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
Un possibile complementare ad $U_{-1} + W_{-1}$ è quindi lo span di e_4. Non è unico (basta ad esempio prendere lo span di $e_4 + v_1$).

5. Dal punto 2 sappiamo che $U_{-1} \cap W_{-1} = \langle v_3 \rangle$. Dal lemma di scambio, otteniamo $U_{-1} = \langle v_1, v_3 \rangle$ e $W_{-1} = \langle v_3, v_4 \rangle$. Poich $v_4 \notin U_{-1}$ otteniamo che $\dim(U_{-1} + W_{-1}) = 3$ e che $U_{-1} + W_{-1} = \langle v_1, v_3, v_4 \rangle$. Un complementare di $U_{-1} + W_{-1}$ è lo span di e_4, come abbiamo visto nel punto precedente. Concludiamo che ogni sottospazio vettoriale della forma $\langle xv_1 + yv_4, e_4 \rangle$ per due fissati numeri non-nulli $x, y \neq 0$ è un complementare comune sia a U_{-1} che a W_{-1}.