

Nome, Cognome e Matricola

Esame scritto di Geometria
Ingegneria Civile
Primo appello 2022
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

9 gennaio 2023

Esercizio 1. In $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ consideriamo i punti $A = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. (1 punto) Calcolare il punto medio M del segmento $\overline{AB}$.
2. (1 punto) Calcolare equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per A e B .
3. (1 punto) Calcolare la pendenza della retta r .
4. (1 punto) Trovare un punto C avente coordinate positive e tale che il triangolo di vertici A , B e C sia rettangolo in C e isoscele.
5. (1 punto) Trovare il punto D ottenuto riflettendo ortogonalmente il punto C attraverso la retta r .
6. (1 punto) Trovare equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza $\mathcal{C}$ avente il segmento $\overline{AB}$ come diametro.
7. (1 punto) Sia $\mathcal{Q}$ il quadrato di vertici A , B , C e D . Trovare un endomorfismo lineare F di $\mathbb{R}^2$ tale che $F(\mathcal{Q})$ abbia area uguale a 1.

Fare un disegno che illustri la situazione.

Esercizio 2. Si considerino le seguenti due rette di $\mathbb{R}^3$:

$$r_1 : \begin{cases} x - y + z = 7 \\ 3x - y - z = 3 \end{cases} \quad e \quad r_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

1. (1 punto) Determinare la posizione reciproca di r_1 ed r_2 , senza cambiare la loro forma.
2. (1 punto) Calcolare equazioni cartesiane per il piano contenente r_1 e passante per il punto $P_2 = (-4, -7, 4)^t$.
3. (1 punto) Trovare equazioni parametriche di r_1 .
4. (1 punto) Calcolare equazioni parametriche del piano contenente r_2 e parallelo a r_1 .
5. (1 punto) Trovare equazioni cartesiane di r_2 .
6. (1 punto) Calcolare la distanza tra r_1 ed r_2 .
7. (1 punto) Trovare equazioni parametriche e cartesiane della retta di minima distanza tra r_1 ed r_2 ovvero la retta r_3 tale che $r_3 \perp r_i$ e $r_3 \cap r_i \neq \emptyset$ per $i = 1, 2$.

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 9 & -9 & 6 \\ -9 & 11 & -9 & 6 \\ -3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) *Calcolare la traccia di A .*
2. (1 punto) *Calcolare il determinante di A .*
3. (1 punto) *Stabilire se il vettore $v = (1, 1, 0, 0)^t$ è un autovettore per A .*
4. (1 punti) *Calcolare il polinomio caratteristico di A .*
5. (1 punto) *Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*
6. (1 punto) *Calcolare la quarta colonna di A^{-1} utilizzando Cramer.*
7. (1 punto) *Calcolare lo spettro di A^{-1} .*

Esercizio 4. Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ dei polinomi di grado minore o uguale di 2 a coefficienti reali. Denotiamo con $\mathcal{C} = (1, x, x^2)$ la base standard di V . Sia $T : V \rightarrow V$ l'applicazione lineare

$$T(p(x)) = p(x+1) - xp'(x).$$

Si consideri l'insieme $\mathcal{B} = (1+x, 1-x, 1+x+x^2)$.

1. (1 punto) Calcolare $T(2x^2 - x + 1)$.
2. (1 punto) Dimostrare che $\mathcal{B}$ è una base di V .
3. (1 punto) Scrivere la matrice A che rappresenta T nella base $\mathcal{C}$ (sia in partenza che in arrivo).
4. (1 punto) Trovare una base per $\text{Ker}(T)$.
5. (1 punto) Trovare una base per $\text{Im}(T)$.
6. (1 punto) Scrivere la matrice C che rappresenta T nella base $\mathcal{B}$ (sia in partenza che in arrivo)
7. (1 punto) Sia $U = \{p \in V \mid p(0) = 0\}$. Esso è un sottospazio vettoriale. Calcolare la dimensione di $\text{Im}(T) + U$.

Esercizio 5. Si consideri il seguente sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$:

$$U : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{cases}$$

ed il punto $P = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

1. (1 punto) Trovare una base di U .
2. (1 punto) Trovare equazioni cartesiane per $U^\perp$.
3. (1 punto) Trovare una base ortonormale di U .
4. (1 punto) Calcolare la matrice di proiezione ortogonale P_U su U .
5. (1 punto) Calcolare la proiezione ortogonale di P su U .
6. (1 punto) Calcolare la distanza del punto P da U .
7. (1 punto) Trovare una matrice A tale che $Au = 3u$ per ogni $u \in U$ e $Av = -3v$ per ogni $v \in U^\perp$ e stabilire se A è ortogonalmente diagonalizzabile.