

Nome, Cognome e Matricola

Esame scritto di Geometria
Ingegneria Civile
Terzo appello a.a. 2022/23

5 giugno 2023

Esercizio 1. In $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ consideriamo i due punti $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. (1 punto) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per C e P_1 .
2. (1 punto) Calcolare la pendenza della retta r .
3. (1 punto) Calcolare il coseno dell'angolo acuto formato tra la retta r e l'asse delle ascisse, ovvero la retta di equazione $y = 0$.
4. (1 punto) Calcolare la distanza tra C e P_1 .
5. (1 punto) Scrivere l'equazione parametrica e cartesiana della circonferenza $\mathcal{C}$ di centro C e passante per il punto P_1 .
6. (1 punto) Trovare due punti P_2 e P_3 di $\mathcal{C}$ tali che il triangolo di vertici P_1 , P_2 e P_3 sia equilatero.
7. (1 punto) Trovare l'equazione parametrica e cartesiana della retta ottenuta riflettendo ortogonalmente l'asse delle ascisse attraverso la retta r .

Fare un disegno che illustri la situazione.

Esercizio 2. In $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ siano

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. (2 punti) Calcolare equazioni cartesiane della retta r passante per i punti P_1 e P_2 .
2. (1 punto) Stabilire se i punti P_1 , P_2 e P_3 sono allineati.
3. (1 punto) Usare il fascio di piani per r per trovare equazioni cartesiane del piano π passante per i punti P_1 , P_2 e Q .
4. (1 punto) Calcolare $n = \vec{P_1P_2} \wedge \vec{P_1Q}$.
5. (1 punto) Calcolare l'area del triangolo T di vertici P_1 , P_2 e Q .
6. (1 punto) Calcolare la distanza di Q da r

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & 4 & -2 \\ -4 & 6 & 8 & -6 \end{pmatrix}$$

1. (2 punti) *Calcolare il polinomio caratteristico*
2. (1 punto) *Calcolare lo spettro di A .*
3. (3 punti) *Calcolare una base di ogni autospazio di A .*
4. (1 punto) *Stabilire se A è diagonalizzabile e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 e sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di V . Sia $f : V \rightarrow V$ l'unica applicazione lineare tale che

$$f(v_1) = v_1 - 2v_2 + v_3, \quad f(v_2) = v_1 + v_3, \quad f(v_3) = v_1 + v_2 + v_3.$$

1. (1 punto) Calcolare $f(2v_1 - v_2 + 3v_3)$.
2. (1 punto) Scrivere la matrice che rappresenta f nella base $\mathcal{B}$. Denotarla con A .
3. (1 punto) Trovare una base per il nucleo di f .
4. (1 punto) Trovare una base per l'immagine di f .
5. (1 punto) Stabilire se $V = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.
6. (1 punto) Sia $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$ dove

$$w_1 = v_1 + 2v_2, \quad w_2 = -v_1 - v_2, \quad w_3 = v_1 + v_2 + v_3.$$

Dimostrare che $\mathcal{C}$ è una base di V .

7. (1 punto) Scrivere la matrice che rappresenta f nella base $\mathcal{C}$.

Esercizio 5. *Consideriamo la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) *Dimostrare che A è ortogonalmente diagonalizzabile.*
2. (1 punto) *Stabilire se il vettore $v = e_1 + e_2$ è un autovettore per A .*
3. (1 punto) *Calcolare una base del nucleo di A .*
4. (1 punto) *Trovare una base ortogonale del nucleo di A utilizzando l'algoritmo di Gram-Schmidt.*
5. (1 punto) *Calcolare una base di $\ker(A)^\perp$.*
6. (1 punto) *Utilizzando i punti precedenti, determinare lo spettro di A senza calcolare il suo polinomio caratteristico.*
7. (1 punto) *Trovare una matrice ortogonale B ed una matrice diagonale D tali che $B^t A B = D$.*