

Nome, Cognome e Matricola

Esame scritto di Geometria
Ingegneria Civile
Quarto appello a.a. 2022/23

26 giugno 2023

Esercizio 1. In $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ consideriamo i due punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. (1 punto) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per A e B .
2. (1 punto) Calcolare la pendenza m della retta r .
3. (1 punto) Calcolare il punto medio M del segmento $\overline{AB}$.
4. (1 punto) Calcolare equazioni cartesiane dell'asse del segmento $\overline{AB}$.
5. (1 punto) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza $\mathcal{C}$ avente il segmento $\overline{AB}$ come diametro.
6. (1 punto) Descrivere il seguente luogo geometrico:

$$\mathcal{R} := \{C \in \mathbb{R}^2 \mid \text{il triangolo di vertici } A, B, C \text{ è rettangolo in } C\}.$$

7. (1 punto) Descrivere il seguente luogo geometrico

$$\mathcal{S} := \{C \in \mathbb{R}^2 \mid \text{il triangolo di vertici } A, B, C \text{ ha area uguale a } 2\}.$$

Fare un disegno che illustri la situazione.

Esercizio 2. In $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ consideriamo le due rette

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad r_2 : \begin{cases} x + 2y - z &= 1, \\ 2x + 3y - 2z &= 2. \end{cases}$$

1. (1 punto) Stabilire la posizione reciproca di r_1 ed r_2 , senza cambiare la loro forma.
2. (1 punto) Calcolare equazioni cartesiane della retta r_1 .
3. (1 punto) Calcolare equazioni parametriche della retta r_2 .
4. (1 punto) Usare il fascio di piani per r_2 per trovare equazioni cartesiane del piano π_1 passante per r_2 e parallelo alla retta r_1 .
5. (1 punto) Usare il prodotto vettoriale per trovare equazioni cartesiane del piano π_2 passante per r_1 e parallelo alla retta r_2 .
6. (2 punti) Calcolare la distanza tra r_1 ed r_2 .

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Calcolare $\text{rref}(A)$.
2. (1 punto) Calcolare una base di $\text{Ker}(A)$.
3. (1 punto) Stabilire se $v = e_1 + e_2 - 2e_3$ è un autovettore per A .
4. (1 punto) Calcolare la matrice $P_{\text{Col}(A)}$ di proiezione ortogonale su $\text{Col}(A)$.
5. (1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A .
6. (1 punto) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
7. (1 punto) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.

Esercizio 4. Siano V e U due spazi vettoriali reali e siano $\mathcal{B}_1 = (v_1, v_2, v_3)$ una base di V e $\mathcal{B}_2 = (u_1, u_2)$ una base di U . Siano $f : V \rightarrow U$ e $g : U \rightarrow V$ le applicazioni lineari tali che

$$\begin{aligned} f(v_1) &= u_1 + u_2, & f(v_2) &= 2u_1 + 2u_2, & f(v_3) &= u_1 - u_2. \\ g(u_1) &= v_1 + v_2 + v_3, & g(u_2) &= v_1 - v_2 + v_3. \end{aligned}$$

1. (1 punto) Calcolare $(g \circ f)(2v_1 - v_2 + 3v_3)$.
2. (1 punto) Scrivere la matrice A che rappresenta f nelle basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$.
3. (1 punto) Scrivere la matrice C che rappresenta g nelle basi $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_1$.
4. (1 punto) Trovare una base per il nucleo di $g \circ f$.
5. (1 punto) Trovare una base per l'immagine di $f \circ g$.
6. (1 punto) Sia $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$ dove

$$w_1 = v_1 + 2v_2, \quad w_2 = -v_1 - v_2, \quad w_3 = v_1 + v_2 + v_3.$$

Dimostrare che $\mathcal{C}$ è una base di V .

7. (1 punto) Scrivere la matrice D che rappresenta $g \circ f$ nella base $\mathcal{C}$.

Esercizio 5. *Consideriamo la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) *Dimostrare che A è ortogonalmente diagonalizzabile.*
2. (1 punto) *Stabilire se il vettore $v = e_1 + e_2$ è un autovettore per A .*
3. (1 punto) *Calcolare una base del nucleo di A .*
4. (1 punto) *Trovare una base ortogonale del nucleo di A utilizzando l'algoritmo di Gram-Schmidt.*
5. (1 punto) *Calcolare una base di $\ker(A)^\perp$.*
6. (1 punto) *Utilizzando i punti precedenti, determinare lo spettro di A senza calcolare il suo polinomio caratteristico.*
7. (1 punto) *Trovare una matrice ortogonale B ed una matrice diagonale D tali che $B^t A B = D$.*