Matrici di proiezione (su un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$ lungo un suo complementare)

Sia $U \subseteq \mathbb{K}^n$ s.sp. vett. e sia $W \subseteq \mathbb{K}^n$ un suo complementare

$$\mathbb{K}^n = U \oplus W$$

$$\begin{aligned} pr_U^W : \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ u + w &\longmapsto u \end{aligned}$$

è lineare.

La matrice associata a pr_U^W nella base canonica si chiama <u>matrice di proiezione</u> su U lungo W.

Si denota $P = P_U^W$.

$P^2 = P$.

Dato $v \in \mathbb{K}^n$ determinare

$$\mathrm{pr}_U^W(v)$$

non è "facile".

Invece conoscendo P,

$$\mathrm{pr}_U^W(v) = Pv$$

Es: In $\mathbb{R}^3$ consideriamo i sottospazi vettoriali

$$U: \quad x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \quad (x_1 = -2x_2 + x_3)$$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

1) Dimostrare che $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$

2) Trovare P_U^W

3) Calcolare $pr_U^W\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$.

Sol.: 1) $U = \ker(1, 2, -1) =$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\dim U = 2$

$\dim W = 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{?}{\in} U \iff 1 + 2 - 1 = 0 \quad \text{FALSO}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U \Rightarrow W \cap U = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

$$\Rightarrow \quad \dim(W + U) = \dim W + \dim U = 3$$

2) $\mathcal{B}_U = \left(u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \overset{\text{base}}{\subset} U$

$$\mathcal{B}_W = \left(w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \overset{\text{base}}{\subset} W$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W = (u_1, u_2, w) \overset{\text{base}}{\subset} \mathbb{R}^3$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "pr_U^W"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] \\
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "S_A"] \arrow[u, bend left, "F_{\mathcal{B}}^{-1}"] & \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}$$

$$S_A := F_{\mathcal{B}} \circ pr_U^W \circ F_{\mathcal{B}}^{-1} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^1 = S_A(e_1) = F_{\mathcal{B}} \circ pr_U^W \circ F_{\mathcal{B}}^{-1}(e_1)$$

$$= (F_{\mathcal{B}} \circ pr_U^W)(u_1) = F_{\mathcal{B}}(pr_U^W(u_1))$$

$$\underset{u_1 \in U}{=} F_{\mathcal{B}}(u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_e"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "pr_U^W"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "F_e"] \\
\mathbb{R}^3 \arrow[r, bend left, "S_{B^{-1}}"] \arrow[rrr, bend right=40, "S_P"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[l, "S_B"] \arrow[r, "S_A"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "S_B"'] & \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}
$$

$$
B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

La matrice di proiezione è

$$
P = BAB^{-1}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "pr_U^W"] \arrow[d, "F_e"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "F_e"] \\
\mathbb{R}^3 \arrow[r] & \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}
$$

$$
S_P = F_e \circ pr_U^W \circ F_e^{-1}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_e"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "pr_U^W"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "F_e"] \\
\mathbb{R}^3 \arrow[r, bend left, "S_{B^{-1}}"] \arrow[rrr, bend right=40, "S_P"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[l, "S_B"] \arrow[r, "S_A"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "S_B"'] & \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}
$$

$$S_P := F_e \circ pr_U^W \circ F_e^{-1}$$

$$= F_e \circ pr_U^W \circ F_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \left(F_{\mathcal{B}} \circ F_e^{-1} \right)$$

$$= F_e \circ pr_U^W \circ F_{\mathcal{B}}^{-1} \circ S_B^{-1}$$

$$= F_e \circ F_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \left(F_{\mathcal{B}} \circ pr_U^W \circ F_{\mathcal{B}}^{-1} \right) \circ S_B^{-1}$$

$$= S_B \circ S_A \circ S_B^{-1}$$

$$\Longrightarrow \quad P = BAB^{-1}$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo B^{-1}

$$(B \mid \mathbb{1}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & -1 & 3/2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = BAB^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{pr}_U^W\left(\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\-1 & 0 & 1\\-1 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\3\\7\end{pmatrix}$$

Es: Consideriamo le seguenti f.ni lineari:

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{L_1} \mathbb{R}^2 \qquad \qquad \mathbb{R}^2 \xrightarrow{L_2} \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \qquad \qquad \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \qquad \qquad \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$$

Calcolare la matrice M che rappresenta $L_2 \circ L_1$ nelle basi standard di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.

Sol. : $\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^3$

$\mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_e"] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "L_1"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_e"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "L_2"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "F_e"] \\
\mathbb{R}^3 \arrow[rrrr, bend right, "S_M"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[l, "S_{B_1}"] \arrow[r, "S_{A(1)}"'] & \mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^2 \arrow[l, "S_{B_2}"] \arrow[r, "S_{A(2)}"'] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad A(2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$M = A(2)\, B_2^{-1}\, A(1)\, B_1^{-1}$$

$$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad A(2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = A(2)\, B_2^{-1} A(1)\, B_1^{-1}$$

= Esercizio =

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sistemi lineari

Un'equazione in n variabili $x_1, \dots, x_n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ si dice lineare se è della forma

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

dove $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{K}$.

$$p(x_1, \dots, x_n) = b$$

dove p è un polinomio omogeneo di grado 1 in n variabili

$$p(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

$$= (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$p : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K} \quad \text{lineare}$$

Una soluzione di

$$p(x_1, \dots, x_m) = b$$

è un vettore

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_m \end{pmatrix}$$

t.c.

$$p(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) = b.$$

$$p = S_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \begin{array}{c}\mathbb{K}\\ \rotatebox{90}{$\in$}\\ b\end{array}$$

<u>Soluzioni di $p(x) = b$</u>

$$= S_A^{-1}(b) = \{ x \in \mathbb{K}^n \mid S_A(x) = b \}$$

controimmagine di b tramite S_A dove $A = (a_1, \dots, a_n)$

$\boxed{n = 1}$:

$$a x = b$$

Soluzioni :

Se $a \neq 0$ $\exists !$ soluzione $\bar{x} = \frac{b}{a}$

Se $a = 0$ ci sono due possibilità:

Se $b = 0$, soluzioni $= \mathbb{K}$ (∞ soluzioni)

Se $b \neq 0$ non ci sono soluzioni

Tricotomia :

- Unica soluzione.
- infinite soluzioni.
- nessuna soluzione.

<u>Prop.</u> : Sia $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$

$S_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$.

Sia $w \in \mathbb{K}^m$.

Se $w \in \operatorname{Im} A$, allora $\exists\, v \in \mathbb{K}^n$ t.c.

$$w = S_A(v).$$

In questo caso

$$S_A^{-1}(w) = \{v\} + \operatorname{Ker} A$$
$$= \{v + Y \mid Y \in \operatorname{Ker} A\}$$

Se $w \notin \operatorname{Im} A$ allora

$$S_A^{-1}(w) = \emptyset$$

<u>NB</u>:

$w \in Col(A)$: $\left[\begin{array}{l} \operatorname{Ker} A = \{0_{\mathbb{K}^n}\} \Rightarrow \exists!\text{ soluzione di } S_A(X) = w \\ \operatorname{Ker} A \neq \{0_{\mathbb{K}^m}\} \Rightarrow \exists\, \infty \text{ soluzioni di } S_A(X) = w \end{array}\right]$

$w \notin Col(A)$ [No soluzioni di $S_A(X) = w$]

Un sistema di m equazioni lineari in n variabili $x_1, \dots, x_n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ è un sistema

$$\begin{cases} P_1(x_1, \dots, x_n) = b_1 \\ P_2(x_1, \dots, x_n) = b_2 \\ \vdots \\ P_m(x_1, \dots, x_n) = b_m \end{cases}$$

in cui

$$P_i(x_1, \dots, x_n) = A_i$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrice dei coefficienti del sistema

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$: vettore dei Termini noTi del sistema.

$\bar{X} \in \mathbb{K}^n$ è soluzione del sistema se e solo se $\bar{X} \in \mathbb{K}^n$ è soluzione dell' equazione matriciale

$$AX = b$$

se e solo se

$$S_A(\bar{X}) = b$$

Il sistema si dice <u>risolubile</u> se $\exists\ \bar{X} \in \mathbb{K}^n$ t.c. $S_A(\bar{x}) = b$.

$$S_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$
$$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \ni b$$

Il sistema $AX = b$

è risolubile se e solo se

$$b \in \operatorname{Im} S_A = \operatorname{Col}(A).$$

<u>Matrice completa</u> del sistema

$$(A \mid b) \in \operatorname{Mat}_{m\times(n+1)}(\mathbb{K})$$

<u>Teorema</u> (di Rouché-Capelli)

Il sistema $AX=b$ è risolubile

$$\Updownarrow$$

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|b)$$

Teorema (di Rouché-Capelli)

Il sistema $AX=b$ è risolubile

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b)$$

dim:

$AX=b$ è risolubile

$$\Updownarrow$$

$b \in \mathrm{Col}(A)$

$$\Updownarrow$$

b non è una colonna dominante di $(A|b)$

$$\Updownarrow$$

le colonne dominanti di $(A|b)$ sono colonne di A.

Teorema di struttura delle soluzioni di un sistema lineare

Sia $AX=b$ un sistema risolubile. Sia X_0 una sua soluzione. L'insieme delle soluzioni del sistema è

$$X_0 + \mathrm{Ker}\, A = \{X_0 + Y \mid Y \in \mathrm{Ker}\, A\}$$

dim:

Soluzioni di $AX=b$

$= S_A^{-1}(b)$.

Es: Studiare il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

nelle variabili x_1, x_2, x_3.

Sol.:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow rg(A|b) = rg A = 2$$

$$\leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{array}\right)$$

$$\leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11/8 & 5/8 \\ 0 & 1 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{array}\right) = \mathrm{rref}(A|b)$$

Il sistema $AX = b$

ha le stesse soluzioni del

sistema

$$\begin{cases} x_1 \qquad + \frac{11}{8} x_3 = \frac{5}{8} \\ \qquad x_2 + \frac{1}{8} x_3 = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

X_0 (ponendo $x_3 = 0$)

$$\begin{cases} x_1 + \frac{11}{8}x_3 = \frac{5}{8} \\ x_2 + \frac{1}{8}x_3 = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

X_0 (ponendo $x_3 = 0$)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{5}{8} \\ -\frac{1}{8} \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_0} + \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} -11 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle}_{\operatorname{Ker} A}$$