Riepilogo sui sistemi lineari

Sia $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$

e sia $b \in \mathbb{K}^m$.

L'equazione matriciale

$$AX = b \quad (*)$$

(nella variabile $X \in \mathbb{K}^n$)

si chiama un

sistema di m equazioni lineari in n incognite.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$(*)$ si scrive

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Una soluzione è un vettore $\overline{X} \in \mathbb{K}^n$ t.c.

$$A\overline{X} = b$$

ovvero

$$S_A(\overline{X}) = b$$

$$S_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$
$$b \in \ni A\overline{X}$$

Soluzioni =

$$= S_A^{-1}(b) = \{X \in \mathbb{K}^n \mid AX = b\}$$

Teorema di struttura

Se $b = S_A(X_0) \in \operatorname{Im} S_A$
allora

$$S_A^{-1}(b) = X_0 + \operatorname{Ker} A$$

$$= X_0 + \langle v_1, \dots, v_{n-r} \rangle$$

dove

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} A} = (v_1, \dots, v_{n-r})$$

Teorema di Rouché-Capelli

Il sistema $AX = b$ è risolubile, ovvero $S_A^{-1}(b) \neq \emptyset$ ovvero $b \in \operatorname{Im} S_A$,

$$\Updownarrow$$

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|b)$$

matrice dei coefficienti del sistema

matrice completa del sistema

Come si studiano i sistemi lineari?

Si studiano con l'algoritmo di Gauss.

a) $(A|b) \rightsquigarrow$ a scala

2 possibilità:

1) b è dominante

2) b non è dominante

Se vale 1) allora il sistema non è risolubile.

Se vale 2)

b) $(A|b) \rightsquigarrow \text{rref}(A|b)$

<u>Prop.</u>: Se $(A|b) \underset{R}{\rightsquigarrow} (R|d)$. Allora i sistemi lineari

$$AX=b \quad e \quad RX=d$$

hanno le stesse soluzioni.

<u>dim</u>: $\exists$ C invertibile t.c.

$$C(A|b)=(R|d)$$

$$CA=R \quad e \quad Cb=d.$$

Sia $\bar{X} \in S_A^{-1}(b)$.

$R\bar{X} = CA\bar{X} = Cb = d$

$\Rightarrow \bar{X} \in S_R^{-1}(d)$. Viceversa sia $\bar{X} \in S_R^{-1}(d)$.

$A\bar{X} = C^{-1}R\bar{X} = C^{-1}d = b$

$\Rightarrow \bar{X} \in S_A^{-1}(b)$ $\blacksquare$

Quindi se $(R|d) = \text{rref}(A|b)$ allora

$AX = b$ e $RX = d$

hanno le stesse soluzioni, ma le soluzioni del sistema a scala ridotta $RX = d$ sono immediatamente calcolabili:

Es: Studiare il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \quad + 3x_4 \quad + 5x_6 = 1 \\ \qquad\quad x_3 + 2x_4 \quad + 4x_6 = 2 \\ \qquad\qquad\qquad x_5 + 3x_6 = 3 \end{cases}$$

La matrice completa è

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \boxed{1} & 2 & \boxed{0} & 3 & \boxed{0} & 5 & 1 \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{1} & 2 & \boxed{0} & 4 & 2 \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{0} & 0 & \boxed{1} & 3 & 3 \end{array}\right)$$

è a scala ridotta.

Le variabili dominanti o dipendenti sono

x_1, x_3, x_5

Le variabili libere o indipendenti sono

x_2, x_4, x_6.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \quad +3x_4 \quad +5x_6 = 1 \\ \qquad x_3 + 2x_4 \quad + 4x_6 = 2 \\ \qquad\qquad x_5 + 3x_6 = 3 \end{cases}$$

Esplicitiamo le variabili dominanti

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_4 - 5x_6 \\ x_3 = 2 \quad -2x_4 - 4x_6 \\ x_5 = 3 \quad -3x_6 \end{cases}$$

Soluzioni =

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1-2x_2-3x_4-5x_6 \\ x_2 \\ 2-2x_4-4x_6 \\ x_4 \\ 3-3x_6 \\ x_6 \end{pmatrix} \middle| x_2, x_4, x_6 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_2, x_4, x_6 \in \mathbb{R} \right\}$$

<u>MATLAB:</u>

$X_0 = A \backslash b$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_0} + \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

soluzioni-base di $RX=0$

__Es__: Studiare il seguente sistema lineare al variare di $K \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + K(K-1)x_4 + (K+3)x_5 = 5-K \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + K(K-1)x_4 + (K+3)x_5 = 6 \\ 4x_1 + 8x_2 + x_3 + K(K-1)x_4 + (K+5)x_5 = 10 \end{cases}$$

__Sol.__:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & K(K-1) & K+3 & 5-K \\ 2 & 4 & 1 & K(K-1) & K+3 & 6 \\ 4 & 8 & 1 & K(K-1) & K+5 & 10 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & k(k-1) & k+3 & 5-k \\ 2 & 4 & 1 & k(k-1) & k+3 & 6 \\ 4 & 8 & 1 & k(k-1) & k+5 & 10 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & k(k-1) & k+3 & 5-k \\ 0 & 0 & -3 & -k(k-1) & -(k+3) & -4+2k \\ 0 & 0 & -7 & -3k(k-1) & -3k-7 & -10+4k \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & k(k-1) & k+3 & 5-k \\ 0 & 0 & -3 & -k(k-1) & -(k+3) & -4+2k \\ 0 & 0 & -1 & -k(k-1) & -k-1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & k(k-1) & k+3 & 5-k \\ 0 & 0 & 0 & 2k(k-1) & 2k & 2+2k \\ 0 & 0 & -1 & -k(k-1) & -k-1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & K(K-1) & K+3 & 5-K \\ 0 & 0 & 0 & 2K(K-1) & 2K & 2+2K \\ 0 & 0 & -1 & -K(K-1) & -K-1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & K(K-1) & K+3 & 5-K \\ 0 & 0 & 1 & K(K-1) & K+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2K(K-1) & 2K & 2+2K \end{array}\right) \quad \text{A scala.}$$

Se $K(K-1) \neq 0$, la 4^a colonna è dominante e l'ultima NO.

Se $K=0$ l'ultima colonna è dominante.

Se $K=1$ la 5^a colonna è dominante e l'ultima no.

Il sistema è risolubile se e solo se $K \neq 0$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & K(K-1) & K+3 & 5-K \\ 0 & 0 & 1 & K(K-1) & K+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2K(K-1) & 2K & 2+2K \end{array}\right)$$

Se $K \neq 1$ e $K \neq 0$,

$$\leadsto \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & K(K-1) & K+3 & 5-K \\ 0 & 0 & 1 & K(K-1) & K+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{K-1} & \frac{1+K}{K(K-1)} \end{array}\right)$$

$$K+3-\frac{K\cancel{(K-1)}}{\cancel{K-1}}$$

$$\leadsto \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 3 & 4-2K \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1-K \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{K-1} & \frac{1+K}{K(K-1)} \end{array}\right)$$

$$5-K-1-K$$

$$2-1-K$$

$$K+1-\frac{K\cancel{(K-1)}}{\cancel{K-1}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 3 & 4-2k \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1-k \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k-1} & \frac{1+k}{k(k-1)} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1-k \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k-1} & \frac{1+k}{k(k-1)} \end{array}\right) = \operatorname{rref}(A|b)$$

Soluzioni :
$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_2 - x_5 \\ x_3 = 1-k - x_5 \\ x_4 = \frac{1+k}{k(k-1)} - \frac{1}{k-1} x_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_5 \\ x_3 = -x_5 \\ x_4 = -\frac{1}{k-1} x_5 \end{cases}$$

$$\text{Soluzioni} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1-k \\ (1+k)/k(k-1) \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1/k-1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & K(K-1) & K+3 & 5-K \\ 0 & 0 & 1 & K(K-1) & K+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2K(K-1) & 2K & 2+2K \end{array}\right)$$

Se $K=1$ essa è

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_3 = -2 \\ x_5 = 2 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema per $K=1$ sono le soluzioni del sistema a scala ridotta:

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_3 = -2 \\ x_5 = 2 \end{cases}$$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{MATLAB} \\ \text{syms } K \end{array}}$

e quindi sono ::

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \underset{\substack{x_2=1 \\ x_4=0}}{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\substack{x_2=0 \\ x_4=1}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\rangle$$