Il determinante

Il determinante è una funzione

$$f: \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

(per ogni $n \geq 1$) con certe proprietà.

Quindi f è una funzione di n^2 variabili.

Es: $f: \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a$$

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = abcd$$

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a-c$$

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad-bc$$

Possiamo considerare f come funzione delle righe della matrice, ovvero

$$f: \underbrace{\mathrm{Mat}_{1\times n}(\mathbb{K}) \times \mathrm{Mat}_{1\times n}(\mathbb{K}) \times \dots \times \mathrm{Mat}_{1\times n}(\mathbb{K})}_{n \text{ volte}} \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$f(A) = f(A_1, A_2, \dots, A_n)$$

oppure come funzione delle colonne

$$f: \underbrace{\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n}_{n \text{ volte}} \longrightarrow \mathbb{K}$$

Es: $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = f(a,b,c,d)$

$$= f\big((a,b),(c,d)\big)$$

$$= f\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right)$$

Cenni di algebra multi-lineare

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Sia $n \geq 1$.

Una funzione

$$f: \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{n \text{ volte}} \longrightarrow \mathbb{K}$$

$f(v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{K}$

$v_1, v_2, \dots, v_n \in V$

<u>Def</u>: f si dice <u>multilineare</u> se è "lineare in ogni variabile vettoriale", i.e.

$\forall i = 1, \dots, n$, $\forall v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \in V$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ $\forall u, w \in V$

<u>Es</u>: ·) $n = 1$

$f: V \longrightarrow \mathbb{K}$ multilineare $=$ lineare

·) $n = 2$, $V = \mathbb{K}$

$f: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$

è bilineare ($=$ multilineare in due variabili)

$f(x, y)$. Fissiamo $y \in \mathbb{K}$ e

$f(-, y): \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ è lineare

$\exists\, a = a(y) \in \mathbb{K}$ t.c.

$f(x, y) = a(y)\, x$

$\exists\, b \in \mathbb{K}$ t.c. $a(y) = b\, y$

$$\boxed{f(x, y) = b\, x\, y}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(v_1, \dots, v_{i-1}, \underset{\underset{i}{\uparrow}}{\alpha u + \beta w}, v_{i+1}, \dots, v_n) &= \alpha\, f(v_1, \dots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \dots, v_n) + \\ &+ \beta\, f(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n) \end{aligned}}$$

Def: Sia $n \geq 1$. Una funzione $f: \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ si dice <u>multilineare sulle righe</u> se f è multilineare come funzione delle righe.

f si dice <u>multilineare sulle colonne</u> se f è multilineare come funzione delle colonne.

OSS: $f: \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ è multilineare come

$$f: \underbrace{\mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}}_{n^2 \text{ volte}} \to \mathbb{K}$$

allora $f(a_{ij}) = \alpha \prod_{i,j=1}^{n} a_{ij}$.

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha\, abcd$$

Es: $f: \mathrm{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$

$$f_1\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a$$

$$f_2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = abcd$$

$$f_3\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a - c$$

$$f_4\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

	Multilineare sulle righe?	Multilineare sulle colonne?
f_1	NO: $f_1\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$	NO
f_2	NO: $f_2\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 4 \neq 2 f_2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	NO
f_3	NO	NO
f_4	SI	SI

Def: Sia $n \geq 1$, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

$$f: V \times \dots \times V \longrightarrow \mathbb{K}$$

si dice alternante se

$$f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = 0$$

non appena $\exists\, i \neq j$ t.c.

$$v_i = v_j.$$

Es: $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a - c$

è alternante sulle righe:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = a - a = 0$$

ma non è alternante sulle colonne

$$f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

Def: Una funzione

$$f: \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

- si dice <u>alternante sulle righe</u> se vale zero sulle matrici che hanno due righe uguali.

- f si dice <u>alternante sulle colonne</u> se f vale zero sulle matrici che hanno due colonne uguali.

Es: $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = ab - ab = 0$$

$$f\begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix} = ac - ac = 0$$

$\Rightarrow$ f è alternante sia sulle righe che sulle colonne

Lemma 1: Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e sia $n \geq 1$ un intero.
Sia $f: V \times \dots \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ una funzione che cambia segno quando si scambiano due variabili, ovvero

$$f(v_1, \dots, \underset{i}{v_i}, \dots, \underset{j}{v_j}, \dots, v_n) = -f(v_1, \dots, \underset{i}{v_j}, \dots, \underset{j}{v_i}, \dots, v_n)$$

Allora f è alternante.

dim:

$$f(v_1, \dots, \underset{i}{v}, \dots, \underset{j}{v}, \dots, v_n) = -f(v_1, \dots, \underset{i}{v}, \dots, \underset{j}{v}, \dots, v_n)$$

$$\Rightarrow f(v_1, \dots, v, \dots, v, \dots, v_n) = 0.$$

$\blacksquare$

OSS: Il viceversa è falso

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-c)b$$

è alternante sulle righe ma

$$f\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 = 4$$

$$f\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2 \cdot 3 = -6 \neq -4$$

Lemma 2: Nelle ipotesi del lemma 1, supponiamo inoltre che f sia <u>multilineare</u>. Allora f è alternante se e solo se f cambia segno quando si scambiano due variabili.

Prop.: Sia $f: Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$

f è multilineare sulle righe e alternante sulle righe

$\Updownarrow$

(R1) $f(P_{ij}A) = -f(A)$

(R2) $f(D_i(\lambda)A) = \lambda f(A)$

(R3) $f(F_{ij}(c)A) = f(A)$

$\forall i \neq j$, $\forall \lambda \neq 0$, $\forall c$, $\forall A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Oss: .) Da (R2) segue che $f(A)=0$ se se A ha una riga nulla

.) Da (R3) segue che $f(A)=0$ se una riga è combinazione lineare delle altre.

Teorema / Definizione:

Esiste un'unica funzione $f: Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ multilineare sulle righe, alternante sulle righe, $f(\mathbb{1}_n) = 1$.

Tale funzione si chiama determinante e si denota con det.

MATLAB: det

dim:

Parte 1: Esistenza del determinante.

Definiamo una funzione

$d^{(n)}: \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$

multilineare e alternante sulle righe e che vale 1 su $\mathbb{1}_n$, "induttivamente" cioè in termini di $d^{(n-1)}$.

Notazione: Sia $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Sia $k \in \{1, .., n\}$. Denotiamo con A_{k1} la matrice ottenuta da A togliendo la riga k e la colonna 1.

Es: .) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$A_{11} = (d)$

$A_{21} = (b)$

.) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

$A_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$

$A_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$

$A_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

Def: Per ogni $n \geq 1$ definiamo la funzione

$$d^{(n)} : Mat_{n \times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

come segue:

$$d^{(1)} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$d^{(1)} = Id_{\mathbb{K}} . \quad d^{(1)}(x) = x \ \forall x \in \mathbb{K}$$

per $n \geq 2$

$$d^{(n)}(A) =$$

$$a_{11} d^{(n-1)}(A_{11}) - a_{21} d^{(n-1)}(A_{21})$$
$$+ a_{31} d^{(n-1)}(A_{31}) - a_{41} d^{(n-1)}(A_{41})$$
$$+ a_{51} d^{(n-1)}(A_{51}) - \dots =$$

$$d^{(n)}(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} d^{(n-1)}(A_{k1})$$

Es:

.) $d^{(2)}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\, d^{(1)}(d) - c\, d^{(1)}(b)$

$$= ad - bc$$

$d^{(1)} = id.$

.) $d^{(3)}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} =$

$$= 1\, d^{(2)}\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - 2\, d^{(2)}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + 7 d^{(2)}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= 1(36-48) - 2(18-24) + 7(12-12)$$

$$= -12 + 12 = 0$$

Teorema (esistenza del determinante)

$d^{(n)}$ è multilineare e alternante sulle righe e $d^{(n)}(\mathbb{1}_n) = 1$.

dim: Dobbiamo dimostrare

$$d^{(n)}(P_{ij} A) = -d^{(n)}(A)$$

$$d^{(n)}(D_i(\lambda) A) = \lambda d^{(n)}(A)$$

$$d^{(n)}(F_{ij}(c) A) = d^{(n)}(A).$$

$\blacksquare$

Teorema:

$d^{(n)}$ è l'unica funzione multilineare e alternante sulle righe che vale 1 sull'identità.

dim: Sia $f: Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ una tale funzione.

Sia $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$.

$$A \underset{R}{\rightsquigarrow} rref(A) = R$$

$$R = E_K \cdots E_1 A$$

$E_K, \dots, E_1$: opportune matrici elementari.

$$A = E_1^{-1} \cdots E_K^{-1} R$$

E_i^{-1} sono matrici elementari

$$f(A) = f(E_1^{-1} \cdots E_k^{-1} R)$$
$$= c\, f(R)$$

dove c è una costante che dipende solo da $E_1, \dots, E_k$.

OSS: $c \neq 0$.

Due possibilità:

1) R ha una riga nulla

2) $R = \mathbb{1}_n$.

Nel caso 1 $f(R) = 0$

Nel caso 2 $f(R) = f(\mathbb{1}_n) = 1$

$f(A) = 0$ se $\operatorname{rg} A < n$

$f(A) = c$ se $\operatorname{rg} A = n$.

Ma anche

$d^{(n)}(A) = 0$ se $\operatorname{rg} A < n$

$d^{(n)}(A) = c$ se $\operatorname{rg} A = n$

Quindi
$$f = d^{(n)}$$

$\blacksquare$