Abbiamo visto ieri:

<u>Teorema</u>: Esiste un'unica funzione

$$\det : Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

$(\forall n \geq 1)$ t.c.

(R1) $\det(P_{ij}A) = -\det(A)$

(R2) $\det(D_i(\lambda)A) = \lambda \det(A)$

(R3) $\det(F_{ij}(c)A) = \det(A)$

$\forall A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$, $\forall i \neq j$, $\forall \lambda, c \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$ e t.c.

$$\det(\mathbb{1}_n) = 1.$$

<u>Esistenza</u>: Abbiamo notato che la funzione

$$\boxed{d^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1}\, d^{(n-1)}(A_{k1})}$$

per $n \geq 2$ e

$$d^{(1)} = Id_{\mathbb{K}}$$

ha le proprietà richieste.

<u>Es</u>: $d^{(2)}$ ha le proprietà richieste:

$$d^{(2)}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$d^{(2)}((a,b),(c,d))$$

$$d^{(2)}(\alpha(a,b)+\beta(a',b'),(c,d))$$

$$= d^{(2)}\begin{pmatrix} \alpha a+\beta a' & \alpha b+\beta b' \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha a+\beta a')d - (\alpha b+\beta b')c$$

$= (\alpha a + \beta a')d - (\alpha b + \beta b')c$

$= \alpha(ad - bc) + \beta(a'd - b'c)$

$= \alpha\, d^{(2)}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \beta\, d^{(2)}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c & d \end{pmatrix}$

Quindi $d^{(2)}$ è lineare nella prima riga.

$d^{(2)}((a,b), \alpha(c,d) + \beta(c',d')) =$

$= d^{(2)}\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha c + \beta c' & \alpha d + \beta d' \end{pmatrix}$

$= a(\alpha d + \beta d') - b(\alpha c + \beta c')$

$= \alpha(ad - bc) + \beta(ad' - bc')$

$= \alpha\, d^{(2)}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \beta\, d^{(2)}\begin{pmatrix} a & b \\ c' & d' \end{pmatrix}$

$\Rightarrow d^{(2)}$ è lineare anche nella seconda riga.

$d^{(2)}\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = ab - ba = 0$

$\Rightarrow d^{(2)}$ è alternante.

$d^{(2)}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 0 = 1$ ■

<u>Unicità</u>: Sia f una f.ne multilineare e alternante sulle righe e che vale 1 sull'identità allora

$R = \mathrm{rref}(A)$ ① R ha una riga nulla ; ② $R = \mathbb{1}_n$

① $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rg}\, A < n$

② $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rg}\, A = n \Leftrightarrow A$ invertibile

$A \rightsquigarrow R = \mathrm{rref}(A) = E_k \cdots E_1 A$

$f(A) = c\, f(R)$ ① 0 ; ② c

COR: Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione n. Sia $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ una base di V.

Allora $\exists!$ funzione

$$f : \underbrace{V \times \dots \times V}_{n = \dim V} \to \mathbb{K}$$

multilineare, alternante t.c. $f(v_1, \dots, v_n) = 1$.

dim: Definiamo

$$f(w_1, \dots, w_n) := $$

$$= \det\left(F_{\mathcal{B}}(w_1)^t, \dots, F_{\mathcal{B}}(w_n)^t \right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} F_{\mathcal{B}}(w_1) \\ \hline F_{\mathcal{B}}(w_2) \\ \hline \vdots \\ \hline F_{\mathcal{B}}(w_n) \end{pmatrix}$$

$$f(-, \alpha u + \beta w, -)$$

$$= \det(-, F_{\mathcal{B}}(\alpha u + \beta w)^t, -)$$

$$\underset{\substack{F_{\mathcal{B}} \text{ è lineare} \\ t \text{ è lineare}}}{=} \det(-, \alpha F_{\mathcal{B}}(u)^t + \beta F_{\mathcal{B}}(w)^t, -)$$

$$\underset{\det \text{ è multilinea}}{=} \alpha \det(-, F_{\mathcal{B}}(u)^t, -) + \beta \det(-, F_{\mathcal{B}}(w)^t, -)$$

$$= \alpha f(-, u, -) + \beta f(-, w, -)$$

$\Rightarrow f$ è multilineare.

$$f(-, w, -, w, -) = \det(-, F_{\mathcal{B}}(w), -, F_{\mathcal{B}}(w), -) = 0$$

$$f(v_1, \dots, v_n) = \det\left(F_{\mathcal{B}}(v_1)^t, \dots, F_{\mathcal{B}}(v_n)^t\right)$$

$$= \det\left(e_1^t, e_2^t, \dots, e_n^t\right)$$

$$= \det\left(\mathbb{1}_n\right) = 1.$$

$\Rightarrow f$ esiste.

Vediamo che f è unica:

Sia g una f.ne con le proprietà richieste.

Sia

$g': \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ t.c.

$$g'(X_1, \dots, X_n) := g\left(F_{\mathcal{B}}^{-1}(X_1), \dots, F_{\mathcal{B}}^{-1}(X_n)\right)$$

g' è multilineare e alternante e $g'(\mathbb{1}_n) = 1$. (Esercizio!)

$$\Rightarrow \quad g'(X_1, \dots, X_n) = \det(X_1, \dots, X_n)$$

$$g(w_1, \dots, w_n) =$$

$$= g'\left(F_{\mathcal{B}}(w_1), \dots, F_{\mathcal{B}}(w_n)\right)$$

$$= \det\left(F_{\mathcal{B}}(w_1), \dots, F_{\mathcal{B}}(w_n)\right)$$

$$= f(w_1, \dots, w_n)$$

$\blacksquare$

Tale f.ne si chiama determinante e si denota

$\det: V \times \dots \times V \longrightarrow \mathbb{K}$

Il determinante 2x2 come area ("orientata")

$V = \mathcal{V}_O^2 = \{ \overrightarrow{OP} \mid P \in \mathcal{E}^2 \}$

Sia $\mathcal{B} = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ una base di $\mathcal{V}_O^2$ t.c.

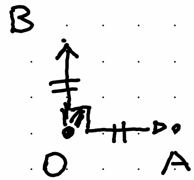
Area parallelogramma generato da $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ =

Area () =

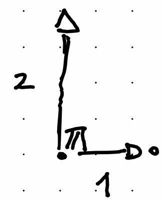
$= |\overline{OA}|\,|\overline{OB}| \sin \underbrace{A\hat{O}B}_{\vartheta} = 1$

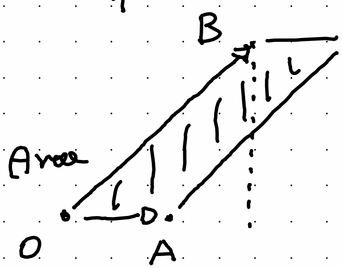
Diciamo che una tale base è **unitaria**

Es:

1) 

$|\overline{OA}| = |\overline{OB}| = 1$

2) 

3) Area  = 1

Per il corollario al Teorema $\exists!$ f.ne

$$A : \mathcal{V}_0^2 \times \mathcal{V}_0^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

t.c. A è bilineare, alternante e

$$A(\vec{OA}, \vec{OB}) = 1.$$

Prop. :

$|A(\vec{OP}, \vec{OQ})| =$ Area del parallelogramma generato da $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$.

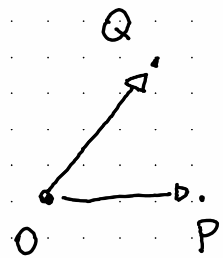
In particolare,

parallelogramma generato da $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$

$$\text{Area}\left(\mathcal{P}(\vec{OP}, \vec{OQ})\right) =$$

$$= \left|\det\left(F_{\mathcal{B}}(\vec{OP})^t, F_{\mathcal{B}}(\vec{OQ})^t\right)\right|$$

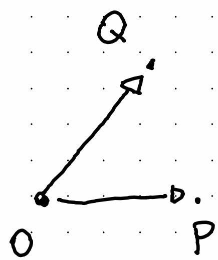
dim: Studiamo le proprietà dell'area di un parallelogramma $\mathcal{P}(\vec{OP}, \vec{OQ})$



$$\text{Area}\left(\mathcal{P}(\vec{OP},\vec{OQ})\right) =$$

$$= \left|\det\left(F_{\mathcal{B}}(\vec{OP})^t, F_{\mathcal{B}}(\vec{OQ})^t\right)\right|$$

<u>dim</u>: Studiamo le proprietà dell' area di un parallelogramma $\mathcal{P}(\vec{OP},\vec{OQ})$

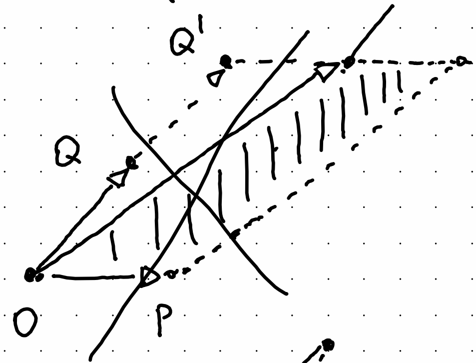


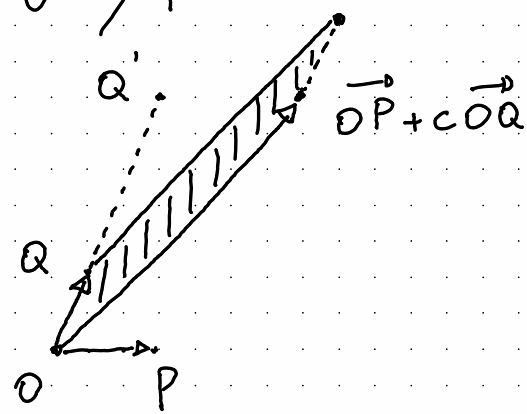
1) $\text{Area}\left(\mathcal{P}(\vec{OP},\vec{OQ})\right) =$

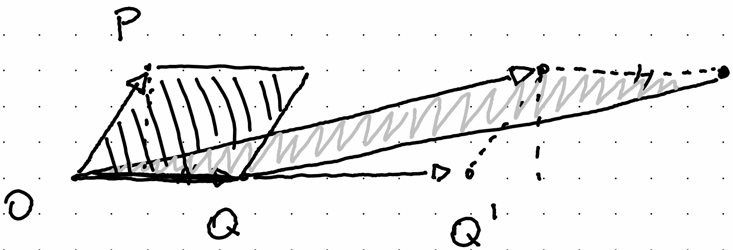
$= \text{Area}\left(\mathcal{P}(\vec{OQ},\vec{OP})\right).$

2) Sia $c>0$

$\text{Area}\ \mathcal{P}(\vec{OP}+c\vec{OQ}, \vec{OQ})$







$$\mathrm{Area}\ \mathcal{P}(\vec{OP}+c\vec{OQ}, \vec{OQ}) = \mathrm{Area}\,(\mathcal{P}(\vec{OP}, \vec{OQ}))$$

Sia $c>0$

$$\mathrm{Area}\,(\mathcal{P}(c\vec{OP}, \vec{OQ})) = c\ \mathrm{Area}\,(\mathcal{P}(\vec{OP}, \vec{OQ}))$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Area}\,(\mathcal{P}(-,-))$ è "bilineare" a meno del segno.

$$\mathrm{Area}\ \mathcal{P}(\vec{OA}, \vec{OB}) = 1$$

Ipotesi: $\mathcal{B} = (\vec{OA}, \vec{OB})$ è unitaria

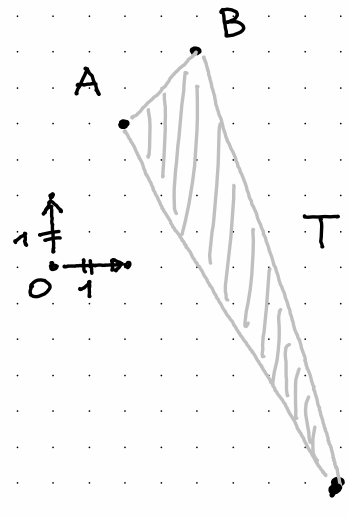
Es: Sia $\mathcal{B}$ una base unitaria di $\mathcal{V}_O^2$.
Calcolare l'area del triangolo di vertici $A, B, C \in \mathcal{E}^2$ t.c.

$$F_{\mathcal{B}}(\vec{OA}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$F_{\mathcal{B}}(\vec{OB}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$F_{\mathcal{B}}(\vec{OC}) = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Sol.:



$$\text{Area}(T) = \frac{1}{2}\,\text{Area}(P(\vec{AC}, \vec{AB}))$$

$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA}$

$$= \frac{1}{2}\left|\det\left(F_{\mathcal{B}}(\vec{OC} - \vec{OA}), F_{\mathcal{B}}(\vec{OB} - \vec{OA})\right)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\det\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}^t, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}^t\right)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} 8 = 4$$

Tecniche di calcolo del determinante ($n \times n$)

Prop.: Sia S una matrice a scala $n \times n$

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & & s_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & s_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det S = s_{11} s_{22} \cdots s_{nn}$$

dim: Se $s_{11} s_{22} \cdots s_{nn} \neq 0$.

$$\det(S) = s_{11} s_{22} \cdots s_{nn} \det(U)$$

dove

$$U = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1n}) =$$

$$= s_{11} \left(1, \frac{s_{12}}{s_{11}}, \frac{s_{13}}{s_{11}}, \dots, \frac{s_{1n}}{s_{11}}\right)$$

$\det(U) = 1$ perché U può essere trasformato in $\mathbb{1}_n$ mediante operazioni elementari di tipo 3, i.e. $F_{ij}(c)$ che non cambiano il determinante.

Se $s_{nn} = 0$ allora $\operatorname{rg} S < n$ e quindi

$$\det(S) = 0 = s_{11} \cdots s_{nn}.$$

$\blacksquare$

Per calcolare $\det(A)$

$A \underset{R}{\rightsquigarrow} S$: a scala

con l'algoritmo di Gauss.

Es:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{"}F_{ij}\text{"}}{\underset{!}{=}} \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \overset{\text{"def } d^{(3)}\text{"}}{\underset{!}{=}} \det\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$\overset{\text{"}F_{ij}\text{"}}{\underset{!}{=}} \det\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \overset{\text{"s"}}{\underset{!}{=}} -6$$

$\square$