Abbiamo visto che $\forall n \geq 1$ la funzione

$$\det : Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

definita induttivamente come

$$\det(x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{K} \qquad (n=1)$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} \det(A_{k1})$$

è multilineare e alternante sulle righe e $\det \mathbb{1}_n = 1$.

<u>OSS</u> (importante):

$\det A \neq 0 \iff \mathrm{rg}\, A = n \iff (A^1, \dots, A^n)$ è una base di $\mathbb{K}^n$

$\iff A$ è invertibile.

$A \underset{R}{\rightsquigarrow} \mathrm{rref}(A) = R$ Ci sono due possibilità

① L'ultima riga di R è nulla $\iff \mathrm{rg}\, R < n \iff \mathrm{rg}\, A < n$

② $R = \mathbb{1}_n$. $\iff \mathrm{rg}\, A = n$.

$\det A = c \det(R)$ dove $c \neq 0$ dipende solo dalle operazioni elementari utilizzate per trasformare A in R.

OSS: Se V è uno sp. vettoriale di dimensione n e $\mathcal{B} \subset V$ è una base. Allora $(w_1, \dots, w_n) \subset V$ è una base di V $\Leftrightarrow$ $\det\left(F_{\mathcal{B}}(w_1) | \dots | F_{\mathcal{B}}(w_n)\right) \neq 0$.

Es: $(x+1)$ e $(x+2)$ formano una base di $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$.

Sol.: $\mathcal{B} = (x, 1)$ $\quad F_{\mathcal{B}}(x+1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad F_{\mathcal{B}}(x+2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\det\left(F_{\mathcal{B}}(x+1) | F_{\mathcal{B}}(x+2)\right) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ $(x+1)$ e $(x+2)$ formano una base.

$\left(F_{\mathcal{B}}(x+1), F_{\mathcal{B}}(x+1)\right)$ è una base di $\mathbb{R}^2$ e poiché $F_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ è un isom. lineare manda basi in basi

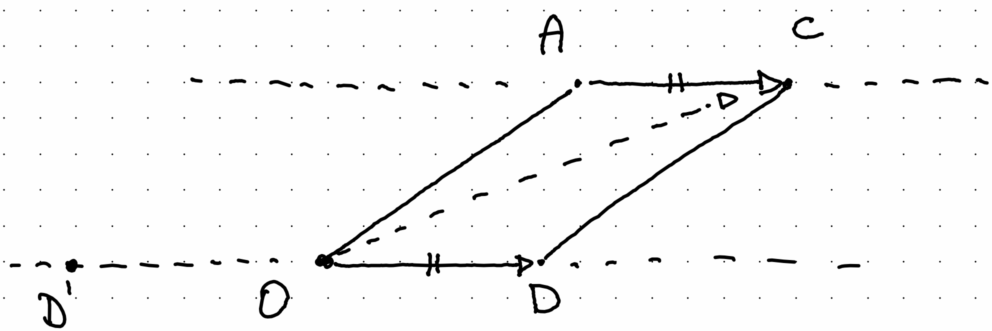
<u>OSS</u>: Per calcolare il determinante <u>non</u> è efficiente (e quindi corretto) usare la definizione tout-court "brutalmente": Invece bisogna operare sulle righe in modo che la prima colonna contenga tanti zeri e poi usare la definizione.

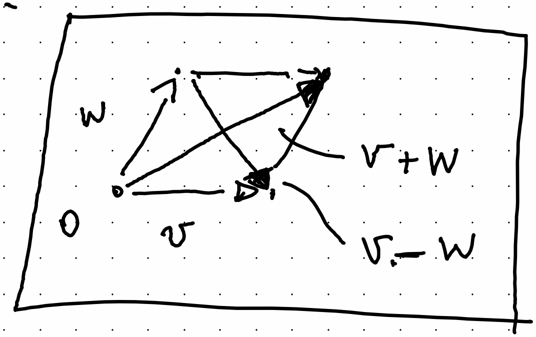
bisogna ridurre la matrice a scala e poi fare il prodotto degli elementi diagonali.

<u>Es</u>: $\det\begin{pmatrix} 1-i & i & 1+i \\ 3-2i & 3i & 8+2i \\ 2-2i & 2i & 4+3i \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1-i & i & 1+i \\ 1 & i & 4-i \\ 2-2i & 2i & 4+3i \end{pmatrix}$

$= \det\begin{pmatrix} 1 & i-1 & 2+5i \\ 1 & i & 4-i \\ 2 & 2i-2 & 6+11i \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & i-1 & 2+5i \\ 0 & 1 & 2-6i \\ 0 & 0 & 2+i \end{pmatrix} = 2+i$

OSS (fondamentale): In $\mathcal{V}_O^2$. $A, C \in \mathcal{E}^2$





$$\vec{AC} \overset{?}{\equiv} \vec{OC} - \vec{OA} = \vec{OD}$$

$$\vec{AC} \equiv \vec{OD} \iff$$

1) hanno la stessa lunghezza
2) hanno la stessa direzione
3) hanno lo stesso verso.

$$\vec{OC} = \vec{OD} + \vec{OA} \Rightarrow \vec{OD} = \vec{OC} - \vec{OA}.$$

Teorema Binet (o del prodotto)

Date $A, B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$.

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

dim 1: Se $A = E$ è una matrice allora

(*) $\det EB = \det E \det B$ per "definizione" di determinante

$$\det P_{ij} = \det(P_{ij}\mathbb{1}_n) = -\det \mathbb{1}_n = -1$$

$$\det D_i(\lambda) = \det(D_i(\lambda)\mathbb{1}_n) = \lambda \det \mathbb{1}_n = \lambda$$

$$\det F_{ij}(c) = \det(F_{ij}(c)\mathbb{1}_n) = \det \mathbb{1}_n = 1$$

Se A non è invertibile allora $\det A = 0$.

Ma anche AB non è invertibile (A non invertibile $\Rightarrow S_A$ non invertibile $\Rightarrow S_A$ non suriettiva $\Rightarrow S_A \circ S_B$ non è suriettiva)

A non invertibile $\Rightarrow$ AB non invertibile

$$\Rightarrow \det AB = 0 = \underset{\overset{\|}{0}}{\det A} \det B.$$

Se A è invertibile allora $A = E_1 \cdots E_k$ per opportune matrici elementari $E_1 \cdots E_k$.

Dalla prima osservazione (*) otteniamo

$$\det(AB) = \det(E_1 \cdots E_k B) \underset{(*)}{=}$$

$$= \det(E_1) \cdot \ldots \cdot \det(E_k) \det B$$

$$\underset{(*)}{=} \det(E_1 \cdots E_k) \det B$$

$$= \det A \det B.$$

<u>dim 2</u> : Se B non è invertibile allora AB non è invertibile (Esercizio!) e quindi

$$\det AB = 0 = \det A \; 0 = \det A \det B .$$

Se B è invertibile consideriamo la funzione

$$f : \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

definita come

$$f(A) = \frac{\det(AB)}{\det B}$$

(R1) $f(P_{ij}A) = \dfrac{\det(P_{ij}AB)}{\det B} = -\dfrac{\det AB}{\det B} = -f(A)$

(R2) $f(D_i(\lambda)A) = \dfrac{\det(D_i(\lambda)AB)}{\det B} = \lambda \dfrac{\det(AB)}{\det B} = \lambda f(A)$

(R3) $f(F_{ij}(c)A) = \dfrac{\det(F_{ij}(c)AB)}{\det B} = \dfrac{\det AB}{\det B} = f(A)$

$$f(\mathbb{1}_n) = \frac{\det B}{\det B} = 1$$

Teo di es. e unicità $\Longrightarrow$ $f(A) = \det A$. ◻

COR: $\det(AB) = \det BA$ anche se $AB \neq BA$.

COR: Se A è invertibile,

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = (\det A)^{-1}.$$

dim:

$$AA^{-1} = \mathbb{1}_n$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \det(AA^{-1}) &= \det \mathbb{1}_n = 1 \\ \det(AA^{-1}) &= \det A \det A^{-1} \end{aligned}\right] \Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

$\blacksquare$

operazioni elementari sulle colonne di una $m \times n$

(C1) $C^i \longleftrightarrow C^j$ "scambio della colonna i con la colonna j"

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \underset{C^1 \leftrightarrow C^2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(C2) $C^i \longmapsto \lambda C^i$ $\lambda \neq 0$ "moltiplicazione della colonna i per $\lambda \neq 0$".

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \underset{C^1 \mapsto 2C^1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

(C3) $C^i \longmapsto C^i + x C^j$ "Rimpiazzare la colonna i con la colonna i + x volte la colonna j"

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \underset{C^2 \mapsto C^2 - 2C^1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A \underset{C}{\rightsquigarrow} B \iff A^t \underset{R}{\rightsquigarrow} B^t$$

~~Più precisamente~~: Quindi:

(C1) $A \underset{C^i \leftrightarrow C^j}{\rightsquigarrow} B \iff A^t \underset{R_i \leftrightarrow R_j}{\rightsquigarrow} B^t$ Esercizio! $\boxed{(P_{ij})^t = P_{ij}}$

$$\iff B^t = P_{ij} A^t \iff$$

$$\iff B = (B^t)^t = (P_{ij} A^t)^t = (A^t)^t (P_{ij})^t = A P_{ij}$$

$\boxed{(AB)^t = B^t A^t}$!!

(C2) $A \underset{C^i \mapsto \lambda C^i}{\rightsquigarrow} B \iff A^t \underset{R_i \mapsto \lambda R_i}{\rightsquigarrow} B^t$

$$\iff B^t = D_i(\lambda) A^t \iff B = A D_i(\lambda)$$

$\boxed{D_i(\lambda)^t = D_i(\lambda)}$ Esercizio.

$$(C3) \quad A \overset{c^i \mapsto c^i + x c^j}{\rightsquigarrow} B$$

$$\iff A^t \overset{R_i \mapsto R_i + x R_j}{\rightsquigarrow} B^t$$

$$\iff B^t = F_{ij}(x) A^t$$

$$\iff B = A\, F_{ji}(x)$$

$$F_{ij}(x)^t = F_{ji}(x)$$

<u>Es</u>:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}}_{F_{21}(x)} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c+xa & d+xb \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}}_{F_{21}(x)} = \begin{pmatrix} a+bx & b \\ c+dx & d \end{pmatrix}$$

<u>OSS</u>:

$$A \underset{C}{\sim\!\triangleright} B \implies \mathrm{Col}(A) = \mathrm{Col}(B).$$

$$A \underset{R}{\sim\!\triangleright} B \implies \mathrm{Col}(A) \neq \mathrm{Col}(B)$$

Rango-riga e spazio delle righe

$A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$

$\mathrm{Row}(A) = \mathrm{Span}(A_1, \dots, A_m) \subset \mathrm{Mat}_{1 \times n}(\mathbb{K})$

$\mathrm{Rrg}(A) := \dim \mathrm{Row}(A) =$ rango-riga di A.

<u>OSS</u>: $\mathrm{Rrg}\, A = \mathrm{rg}\, A^t$

Infatti, $(\ )^t : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathrm{Mat}_{1 \times n}$ è un isomorfismo lineare.

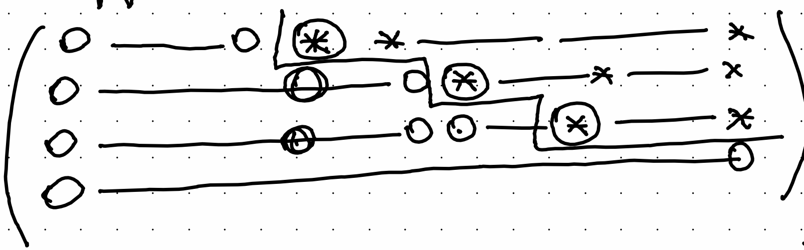
<u>ES</u>: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

<u>Teorema</u>: Sia $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Allora

$$\mathrm{rg}\, A^t = \mathrm{rg}\, A$$

In particolare, $\mathrm{Rrg}\, A = \mathrm{rg}\, A$.

<u>dim</u>: Supponiamo, prima, che $A=S$ sia a scala

$A = S =$ 

$\mathrm{Rrg}\, S =$ numero di righe non-nulle. $= \mathrm{rg}\, S$.

$\circledast \neq 0$. $\circledast$ si chiamano i <u>pivot</u> di S.

<u>Def</u>: Il <u>pivot</u> di una riga di una matrice è il primo elemento non-nullo di tale riga (è definito solo se la riga è non nulla).

Se A non è a scala:

$$A \underset{R}{\rightsquigarrow} S : \text{a scala}$$

$$A^t \underset{C}{\rightsquigarrow} S^t$$

$$\mathrm{Rrg}(A) = \mathrm{rg}(A^t) = \dim \mathrm{Col}(A^t)$$

$$= \dim \mathrm{Col}(S^t) = \mathrm{rg}(S^t) = \mathrm{rg}\, S = \mathrm{rg}\, A.$$

$\mathrm{Col}(A^t) = \mathrm{Col}(S^t)$

$\blacksquare$

Teorema: Sia $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Allora

$$\det A^t = \det A.$$

dim $\blacksquare$

Es:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \overset{\det A = \det A^t}{=} \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = 5.$$