<u>Teorema</u>: Data $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$,

$$\det(A^t) = \det(A)$$

<u>dim</u>: Se $A = E$ è una matrice elementare:

(R1) P_{ij}^t $\quad n = \cancel{4}$ $\quad P_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad P_{24}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$P_{ij}^t = P_{ij}$ (Esercizio!) $\Rightarrow \det P_{ij}^t = \det P_{ij}$.

(R2) $D_i(\lambda)$ $\quad n = 4$ $\quad D_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è <u>diagonale</u>

$D_i(\lambda)^t = D_i(\lambda) \Rightarrow \det(D_i(\lambda)^t) = \det(D_i(\lambda))$

(R3) $F_{ij}(c)^t = F_{ji}(c)$ [Esercizio!]

$n = 4$

$\det(F_{ij}(c)^t) = 1 = \det(F_{ij}(c))$ $\quad F_{21}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad F_{21}(c)^t = F_{12}(c)$

Se A è una matrice $n \times n$ qualunque:

poiché $rg(A^t) = rg(A)$, allora

A è invertibile $\Leftrightarrow$ A^t è invertibile.

ovvero

$$\det A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det A^t = 0.$$

Supponiamo $\det A \neq 0$. Allora A essendo invertibile è prodotto di matrici elementari.

$$A = E_1 \cdots E_K \qquad (\text{con } E_i \text{ elementare})$$

$$\Rightarrow A^t = E_K^t \cdots E_1^t$$

E_i^t è elementare.

$(AB)^t = B^t A^t$

prima parte

$$\det A = \det E_1 \cdots \det E_K = \det E_1^t \cdots \det E_K^t = \det A^t.$$

$\blacksquare$

COR: Esiste un'unica funzione
$$g : Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$
multilineare e alternante sulle colonne e $g(\mathbb{1}_n) = 1$. Tale funzione coincide con il determinante.

dim:

Fatto: g è multilineare e alternante sulle colonne se e solo se

(C1) $g(AP_{ij}) = -g(A)$

(C2) $g(AD_i(\lambda)) = \lambda g(A)$

(C3) $g(AF_{i\underline{j}}(c)) = g(A)$.

Esistenza (di una tale g):

Definiamo

$$g(A) := \det(A^t)$$

(C1) $$g(AP_{ij}) = \det((AP_{ij})^t) = \det(P_{ij}^t A^t) = \det(P_{ij} A^t)$$
$$= -\det(A^t) = -g(A).$$

(C2) $$g(AD_i(\lambda)) = \det((AD_i(\lambda))^t) = \det(D_i(\lambda)^t A^t) =$$
$$= \det(D_i(\lambda) A^t) = \lambda \det(A^t) = \lambda\, g(A)$$

(C3) $$g(AF_{ij}(c)) = \det((AF_{ij}(c))^t) = \det(F_{ij}(c)^t A^t)$$
$$= \det(F_{ji}(c) A^t) = \det(A^t) = g(A)$$

$$g(\mathbb{1}_n) = \det(\mathbb{1}_n^t) = \det(\mathbb{1}_n) = 1.$$

Unicità (di una tale g):

Sia g una f.ne con queste proprietà. Facciamo vedere che $g(A) = \det(A^t)$.
Definiamo la f.ne $f: Mat_{n \times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ come $\boxed{f(A) = g(A^t).}$

Allora (esercizio!) f è multilineare e alternante sulle righe e $f(\mathbb{1}_n) = 1$.
Quindi $f = \det$. Ne segue

$$g(A) \underset{\substack{\uparrow \\ (A^t)^t = A}}{=} f(A^t) = \det(A^t).$$

Per concludere:

$$g(A) = \det(A^t) \overset{\text{Teo}}{=} \det(A) \Rightarrow g = \det$$

$\blacksquare$

Per calcolare il determinante possiamo operare anche sulle colonne:

<u>Es</u>:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

<u>Es</u>:

$$\det\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -2\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -2\det\begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -2\det\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -2\det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = -4$$

Sviluppi di Laplace

Abbiamo definito $\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{\underline{k}1} \det(A_{\underline{k}1})$

Invece della 1^a colonna possiamo scegliere una qualunque altra colonna o riga.

Teorema (Sviluppi di Laplace): Sia $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$.

1) Dato un indice di riga i

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

"sviluppo lungo la riga i"

2) Dato un indice di colonna j

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

"sviluppo lungo la colonna j".

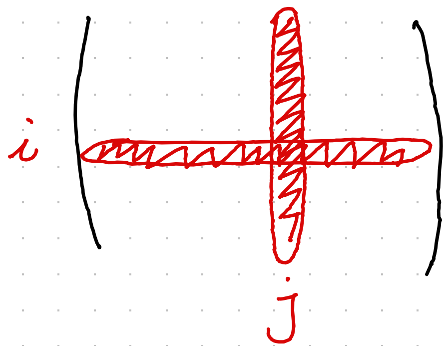
dove A_{ij} = la matrice ottenuta da A rimuovendo A_i e A^j.

Es (di A_{ij}) :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A_{21} = b \qquad A_{12} = c \qquad A_{22} = a$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, \quad A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$A =$ 

dim:

1) $\hat{e}_1 = e_1^t = (1\ 0 \dots 0)$ $\quad \hat{e}_2 = e_2^t = (0\ 1\ 0 \dots 0)$

$\hat{e}_i := e_i^t \quad \forall i = 1, \dots, n.$ $\quad n=2 \quad \hat{e}_1 = (1\ 0)$
$\hat{e}_2 = (0\ 1)$

$$A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \hat{e}_j$$

$$\det A = \det(A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n)$$

$$= \det\left(A_1, A_2, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{e}_j, \dots, A_n\right)$$

det è multilineare sulle righe

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \det(A_1, A_2, \dots, \hat{e}_j, \dots, A_n)$$

Rimane da dimostrare

$$\det(A_1, A_2, \dots, \hat{e}_j, \dots, A_n) = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

$$\det(A_1, \dots, A_{i-1}, \hat{e}_j, A_{i+1}, \dots, A_n) =$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,i} & \cdots & a_{i-1\,j} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,i} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \overset{\text{op. el. di tipo 3.}}{=}$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,i} & \cdots & 0 & \cdots & a_{i-1\,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,i} & \cdots & 0 & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \overset{i-1 \text{ scambi di riga}}{=}$$

$$
= (-1)^{i-1} \det \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} & & & & & & j & & & \\ & & & & & & \downarrow & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,i} & \cdots & 0 & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,i} & \cdots & 0 & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}
$$

$$
= (-1)^{j-1} (-1)^{i-1} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,i} & & a_{i-1\,n} \\ 0 & a_{i+1\,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1\,i} & & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & & a_{nn} \end{pmatrix} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.
$$

$\blacksquare$

Es :

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sviluppo lungo la riga 3

$$\overset{\downarrow}{=} (-1)\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sviluppo il det lungo la riga 2

$$= -\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \overset{\swarrow}{=} \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= 2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

Riepilogo: Per calcolare $\det(A)$

1) operare sulle righe e sulle colonne di A in modo da creare molti zeri su una riga o una colonna

2) Sviluppare il determinante lungo quella riga o quella colonna

3) $\det$ (a scala) $=$ prodotto degli elementi diagonali.

Determinante di matrici a blocchi triangolari

$$\det \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} k & t \end{array} \\ \begin{array}{c} k \\ t \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \end{array}$$

$A \in Mat_{k \times k}$ $\quad B \in Mat_{t \times t}$

$C \in Mat_{k \times t}$.

Teorema: $\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \det B$

$$\det \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 11 \end{array}\right) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} 11 = -22.$$

Calcolo dell'inversa mediante det

Def: Dato $n \geq 1$ e $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ e dati $i,j \in \{1, \dots, n\}$, il <u>cofattore (i,j) di A</u> è il numero

$$C_{ij} = C_{ij}(A) = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

segno di C_{ij}

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \\ + & - & + & - & \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Es: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$C_{11} = (-1)^2 \det A_{11} = d$ $\qquad$ $C_{12} = (-1)^3 \det (A_{12}) = -c$

$C_{21} = (-1)^3 \det A_{21} = -b$ $\qquad$ $C_{22} = (-1)^4 \det A_{22} = a$

La matrice aggiunta di A è la matrice $n \times n$

$$Agg(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

$$Agg(A)_i^j = C_{ij}$$

Es: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\qquad$ $Agg(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

Es:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad Agg(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad (*)$$

$$\rightsquigarrow \quad (ad-bc)\, A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$Agg(A)^t = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$(*) \Rightarrow \quad A\, Agg(A)^t = A \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = (ad-bc)\, \mathbb{1}_2$$

$$= \det A \; \mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} \det A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix}$$