Comunicazione: I frequentanti "della prima ora" devono compilare il questionario OPIS.

Abbiamo dimostrato: data $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{A})$ $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

sviluppo lungo la colonna j-esima

sviluppo del determinante lungo la riga i-esima.

A_{ij} = matrice ottenuta da A rimuovendo A_i e A^j.

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

$$\det A = -2 \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} + 1 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - 3 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - 3 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + 5 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Data $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$ abbiamo definito il co-fattore (i,j) di A $(\forall i,j \in \{1,..,n\})$ come

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}.$$

La matrice aggiunta di A è la matrice $n \times n$

$$Agg(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & & & \\ C_{i1} & C_{i2} & \cdots & C_{in} \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad Agg(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$A \, Agg(A)^t = \begin{pmatrix} \det A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix} = \det A \, \mathbb{1}_2. \qquad \left(\text{Se } \det A \neq 0 \right)$$

__Teorema__: Sia $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$. Allora

$$\boxed{A\, Agg(A)^t = \det A\, \mathbb{1}_n}$$

__dim__: Sappiamo che $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{ij}$.

Dobbiamo dimostrare che

$$\left(A\, Agg(A)^t\right)_i^j = \begin{cases} \det A & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i\neq j \end{cases}$$

Caso $i=j$:

$$\left(A\, Agg(A)^t\right)_i^i = A_i \left(Agg(A)^t\right)^i = A_i \left(Agg(A)_i\right)^t$$

$$= (a_{i1}, \dots, a_{in}) \begin{pmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ \vdots \\ c_{in} \end{pmatrix} = a_{i1} c_{i1} + a_{i2} c_{i2} + \dots + a_{in} c_{in}$$

$$= \det A.$$

Caso 2: $i \neq j$

$$\left(A \, Agg(A)^t\right)_i^j = A_i \left(Agg(A)^t\right)^j = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \begin{pmatrix} c_{j1} \\ c_{j2} \\ \vdots \\ c_{jn} \end{pmatrix}$$

$$= a_{i1}c_{j1} + a_{i2}c_{j2} + \dots + a_{in}c_{jn} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{jk}$$

Vogliamo dimostrare che è zero.

Consideriamo la matrice

$$B = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \qquad A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

B ha due righe uguali

Facciamo vedere $\sum a_{ik}c_{jk} \overset{!}{=} \det B = 0$

$$B = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \qquad A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

$$C_{jk}(B) = C_{jk}(A) \quad \forall k.$$

$$b_{jk} = a_{ik}$$

$$\det B \underset{\substack{\uparrow \\ \text{lungo la} \\ \text{riga } j}}{=} \sum_{k=1}^{n} b_{jk}\, C_{jk}(B) = \sum_{j=1}^{n} a_{ik}\, C_{jk}(A)$$

$\blacksquare$

COR: Se A è invertibile, allora

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{Agg}(A)^t$$ [Formula di Cramer]

dim:

Sappiamo che A è invertibile $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Dal Teorema $A \operatorname{Agg}(A)^t = \det A \, \mathbb{1}_n$.

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Agg}(A)^t = \det A \ A^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{Agg}(A)^t.$$ ∎

Es: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & \frac{1}{2} & -3 \\ -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Calcolare A^{-1} con la formula di Cramer.

Sol.:
$$\det A = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3/2 \end{pmatrix} = -4 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix} =$$

$$= -4 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = (-4)\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 2$$

$C_{11} = +\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = 4,$ $\quad C_{21} = -\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2},$ $C_{31} = \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -3$

$C_{12} = -\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = -2$ $\quad C_{22} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2},$ $C_{32} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = +1$

$C_{13} = -4$ $\quad C_{23} = 0$ $\quad C_{33} = 4$

Utilizzo della formula di Cramer per risolvere (alcuni) sistemi lineari

Sia $AX=b$ un sistema lineare di n equazioni in n incognite t.c. $\operatorname{Ker} A = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$.

Un tale sistema si chiama <u>non-singolare</u>.

Sia X_0 l'unica soluzione di tale sistema.

$$X_0 = A^{-1} b$$

$$\left[AX=b \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1} b \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1} b \Rightarrow X = A^{-1} b \right]$$

Diciamo

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Determiniamo x_j $(\forall j = 1, \dots, n)$:

$$x_j = (A^{-1}b)_j = (A^{-1})_j \, b \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cramer}}}{=} \frac{1}{\det A} (\operatorname{Agg}(A)^t)_j \, b$$

$$x_j = (A^{-1}b)_j = (A^{-1})_j\, b \underset{\substack{\uparrow\\ \text{ima}}}{=} \frac{1}{\det A} \left(\operatorname{Agg}(A)^t\right)_j b$$

$$= \frac{1}{\det A} \left(c_{j1}, \cancel{c_{j2}}, \dots, c_{jn}\right) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

[Formula di Cramer]

$$= \frac{1}{\det A} \left(c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{nj}\right) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det A} \left(b_1 c_{1j} + b_2 c_{2j} + \dots + b_n c_{nj}\right)$$

$$= \frac{\det\left(A^1 | \dots | A^{j-1} | b | A^{j+1} | \dots | A^n\right)}{\det A} =: \frac{\det A^j(b)}{\det A}$$

__Es__:
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1 \\ x_1 + 4x_2 = 2 \end{cases}$$

__Sol.__:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 8+3 = 11 \qquad X_0 = A^{-1} b = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{1}{11} \det \begin{array}{c} \begin{matrix} b & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array} = \frac{10}{11}$$

$$x_2 = \frac{1}{11} \det \begin{array}{c} \begin{matrix} & b \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} = \frac{3}{11}$$

$$\Rightarrow \boxed{X_0 = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

Es:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Sol.:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = -13 \neq 0$$

$\exists!$ soluzione $\qquad X_0 = A^{-1} b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$y_1 = \frac{1}{(-13)} \det \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = -\frac{1}{13}\, 0 = 0$$

$$y_2 = -\frac{1}{13} \det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{13}(-26) = 2$$
$$\begin{array}{ccc} & b & \end{array}$$

$$y_3 = -\frac{1}{13} \det \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & b \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = -\frac{1}{13}(-13) = 1$$

Utilizzo del determinante per il calcolo del rango di una matrice qualunque

(Teorema degli orlati)

__Notazione__: Sia $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$. Siano

$$1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_s \le m$$

$$1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_t \le n$$

$A([i_1, \dots, i_s], [j_1, \dots, j_t]) \in Mat_{s \times t}(\mathbb{K})$ denota la matrice ottenuta da A nelle righe $i_1, \dots, i_s$ e nelle colonne $j_1, \dots, j_t$.

In __MATLAB__: $A([i_1, \dots, i_s], [j_1, \dots, j_t])$.

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & -10 & -7 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & -9 \\ -6 & -5 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix} \qquad A([2,3],[2,4]) = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & -10 & -7 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & -9 \\ -6 & -5 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix} \qquad A([2,4],[2,3,5]) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -7 \\ -5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & -10 & -7 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & -9 \\ -6 & -5 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix} \qquad A([1,3,4],[1,3,5]) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -9 \\ -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$A([i_1,\dots,i_s],[j_1,\dots,j_t])$ = sottomatrice di A supportata nelle righe $i_1,\dots,i_s$ e nelle colonne $j_1,\dots,j_t$.

OSS 1 : $A([i_1,\dots,i_s],[j_1,\dots,j_t])$ se le sue colonne sono lin. ind. Allora anche $A^{j_1},\dots,A^{j_t}$ sono lin. ind..

ES :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 10 & 20000 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sono lin. ind.

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \\ 20000 \end{pmatrix}$ sono lin. ind.

Def: Sia $B = A([i_1, \dots, i_k], [j_1, \dots, j_k])$ una sottomatrice quadrata di A

Diciamo che dato $l \notin \{i_1, \dots, i_k\}$ e $s \notin \{j_1, \dots, j_k\}$ la sottomatrice

$$A([i_1, \dots, i_k] \cup \{l\}, [j_1, \dots, j_k] \cup \{s\})$$

è l'orlata di B con la riga l e la colonna s

oppure che è ottenuta orlando la matrice B con la riga l e la colonna s.

Es:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & -10 & -7 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & -9 \\ -6 & -5 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A([2,3],[2,4]) = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

orliamola $\rightsquigarrow$ con la riga 4 e la colonna 3

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & -10 & -7 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & -9 \\ -6 & -5 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

l'orlato di $A([2,3],[2,4])$ con la riga 4 e la colonna 3 è

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -10 \\ 4 & -2 & -1 \\ -5 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Teorema (degli orlati)

Sia $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$. Allora

$$\operatorname{rg} A = k$$
$$\Updownarrow$$

$\exists$ una sottomatrice $k \times k$ che ha determinante diverso da zero e tutte le sue orlate hanno determinante uguale a zero. In formule:

$\exists \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m \quad e \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ t.c.

1) $\det A([i_1, \dots, i_k], [j_1, \dots, j_k]) \neq 0$

2) $\det A([i_1, \dots, i_k] \cup \{\ell\}, [j_1, \dots, j_k] \cup \{s\}) = 0$

$\forall \ell \notin \{i_1, \dots, i_k\} \quad \forall s \notin \{j_1, \dots, j_k\}$.

minore = determinante di una sottomatrice quadrata

minore orlato = determinante di un'orlata.

Es: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sono lin ind. :

perché $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1-2 = -1 \neq 0$

Es:

$$\operatorname{rg}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & -7 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & 9 & 5 \end{pmatrix}}_{}^{A} = ?$$

Sol.:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 0 & 7 & 7 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 7 & 7 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 56 \end{pmatrix} = 56 \neq 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg} A \geq 3$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & -7 \\ 7 & 2 & 9 & 5 \end{pmatrix} = \dots = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & -7 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & -1 \\ 0 & 7 & 7 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg} A = 3.$$