Diagonalizzazione di endomorfismi lineari

Sia $\mathcal{L} : V \to V$ un endomorfismo lineare

$V \circlearrowleft \mathcal{L}$ $\mathcal{L}$ agisce su V, muove i vettori di V.

$v \mapsto \mathcal{L}(v) \mapsto \mathcal{L}^2(v) \mapsto \dots \to \mathcal{L}^n(v)$: Traiettoria di v tramite $\mathcal{L}$.

Def: Un sottospazio vettoriale si dice $\mathcal{L}$-invariante o stabile se $\underbrace{\mathcal{L}(U)}_{\{\mathcal{L}(u) \mid u \in U\}} \subseteq U$.

Es: $U = \{0_V\}$ allora $\mathcal{L}(U) = U$ perché $\mathcal{L}$ è lineare.

Esistono sottospazi invarianti per $\mathcal{L}$?

Es: .) $\mathcal{L} = 0 : V \longrightarrow V$ è lineare.
$$v \longmapsto 0_V$$

Ogni s.sp. vettoriale $U \subseteq V$ è $\mathcal{L}$-invariante:
$$\mathcal{L}(U) = \{0_V\} \subset U.$$

.) $\mathcal{L} = Id_V : V \longrightarrow V$
$$v \longmapsto v$$

ogni s.sp. vett. $U \subseteq V$ è $\mathcal{L}$-invariante (in senso forte): $\forall\, u \in U$
$\mathcal{L}(u) = u \in U \Rightarrow U$ è fissato puntualmente.

.) $\mathcal{L} = -Id_V : V \longrightarrow V$
$$v \longmapsto -v$$

ogni s.sp. vett. è $\mathcal{L}$-invariante ma non in senso forte.
$$\mathcal{L}(U) = U \quad \forall\, U \subseteq V \text{ s.sp. vett.}$$

Sottospazi invarianti di dimensione uno: autovettori e autovalori

Sia $U = \langle v \rangle$ con $v \in V \setminus \{0_V\}$.

retta per l'origine := s.sp. vett. di dimensione 1.

Se U è $\mathcal{L}$-invariante allora $\mathcal{L}(U) \subseteq U = \langle v \rangle$
in particolare $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ t.c. $\boxed{\mathcal{L}(v) = \lambda v}$.

Viceversa se $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ t.c. $\boxed{\mathcal{L}(v) = \lambda v}$ allora
U è $\mathcal{L}$-invariante, infatti

$$\mathcal{L}(tv) = t\,\mathcal{L}(v) = t(\lambda v) = (t\lambda)v \in \langle v \rangle = U$$

<u>Def</u> : Un <u>autovettore di autovalore λ</u> per un endomorfismo lineare $\mathcal{L}$ di un $\mathbb{K}$-sp. vett. V è un vettore <u>non-nullo</u> $v \in V$ t.c.

$$\mathcal{L}(v) = \lambda v$$

Una retta è $\mathcal{L}$-invariante $\Leftrightarrow$ è generata da un autovettore. $\underset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ ASSE DI SIMMETRIA PER $\mathcal{L}$

<u>Es</u> : ·) $\mathcal{L} = 0_V$ $\quad \mathcal{L}(v) = 0_V = 0 v$

$\Rightarrow$ ogni vettore non-nullo è un autovettore per $\mathcal{L}$ di autovalore 0

·) $\mathcal{L} = Id_V$, $\quad \mathcal{L}(v) = v = 1 v$

$\Rightarrow$ ogni vettore non-nullo è un autovettore per $\mathcal{L}$ di autovalore 1

·) $\mathcal{L} = -Id_V$, $\quad \mathcal{L}(v) = -v = (-1) v$

$\Rightarrow$ $v \neq 0_V$ è un autovettore di autovalore -1.

$\underline{Es}$: $\cdot)$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$A e_1 = A^1 = 2 e_1 \Longrightarrow e_1$ è un autovettore di autovalore 2.

$\cdot)$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$

$A e_1 = A^1 = a_{11} e_1 \Longrightarrow e_1$ è un autovettore di autovalore a_{11}.

$\cdot)$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Es: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$Ae_1 = 2e_1 \Rightarrow e_1$ è un autovettore di autovalore 2

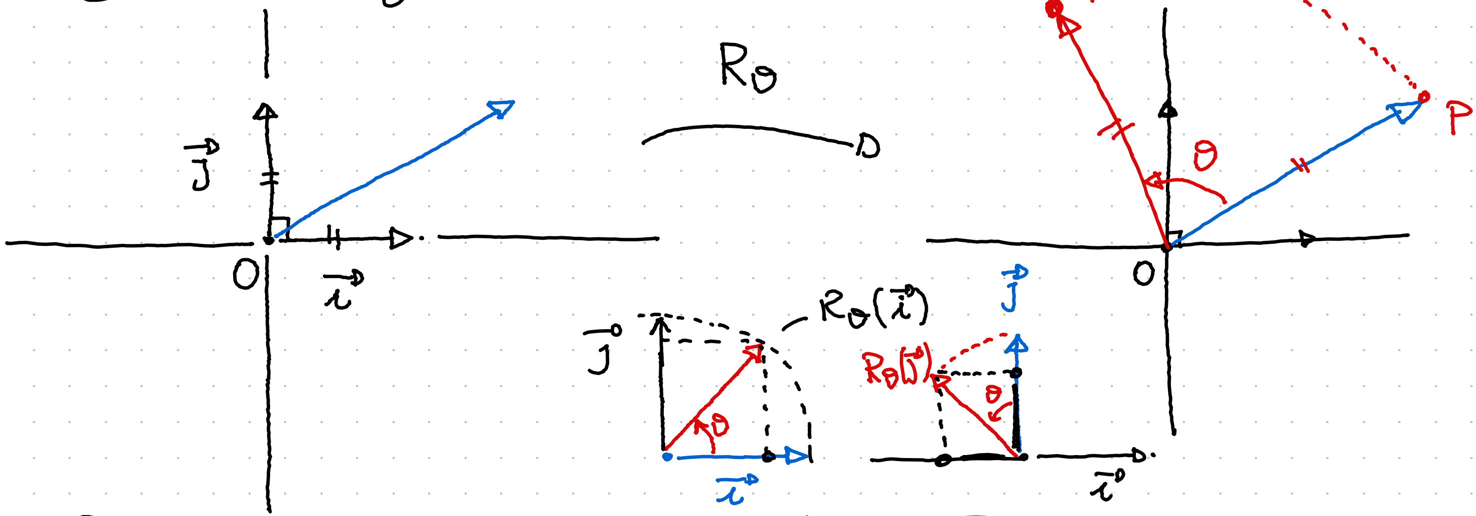
$Ae_2 = 4e_2 \Rightarrow e_2$ è un autovettore di autovalore 4

$A(4e_2) = 4(Ae_2) = 4(4e_2) \Rightarrow 4e_2$ è un autovettore di autovalore 4.

oss: Se v è un autovettore di autovalore λ, allora anche tv è un autovettore di autovalore λ, $\forall t \in \mathbb{K}$:

$$\mathcal{L}(tv) = t(\mathcal{L}(v)) = t(\lambda v) = \lambda(tv).$$

Es: $V = V_0^2$ sia $\theta \in [0, 2\pi)$



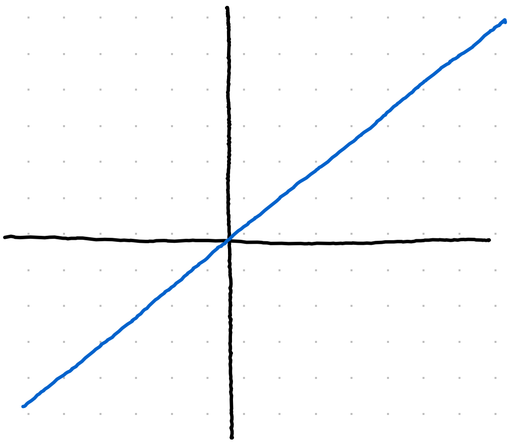
R_θ = rotazione di un angolo θ attorno a O in senso anti-orario

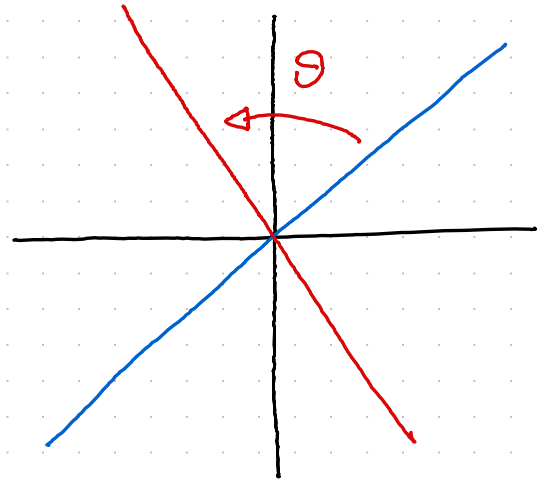
$$R_\theta \underset{\uparrow}{=} \left(F_e(R_\theta(\vec{i})) \,\middle|\, F_e(R_\theta(\vec{j})) \right) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

matrice associata nella base $(\vec{i}, \vec{j}) = e$

MATRICE DI ROTAZIONE

Ci sono rette fissate da R_θ ?





$$\left.\begin{array}{l} \text{Se } \theta = 0, \quad R_0 = Id_{V_0^2} \\ \text{Se } \theta = \pi, \quad R_\pi = -Id_{V_0^2} \end{array}\right] \text{ Ammettono autovettori.}$$

Se $\theta \neq 0$ e $\theta \neq \pi$ allora $R_\theta : V_0^2 \to V_0^2$ non ha autovettori.

<u>NB</u>: V_0^2 è uno sp. vettoriale <u>reale</u>.

Cosa vuol dire essere autovettore di autovalore λ?

Possiamo ridurci a trattare solo $\mathcal{L} = S_A$. Infatti

- Fissiamo una base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ di V
- Consideriamo la matrice associata a $\mathcal{L}$ in $\mathcal{B}$:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\mathcal{L}} & V \\ {\scriptstyle F_{\mathcal{B}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_{\mathcal{B}}} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{S_A} & \mathbb{K}^n \end{array} \qquad A = \left(F_{\mathcal{B}}(\mathcal{L}(v_1)) \middle| \cdots \middle| F_{\mathcal{B}}(\mathcal{L}(v_n)) \right)$$

$\mathcal{L}(v) = \lambda v \iff A\, F_{\mathcal{B}}(v) = \lambda\, F_{\mathcal{B}}(v)$. [Esercizio]

v è un autovettore per $\mathcal{L}$ di autovalore λ

$$\Updownarrow$$

$X = F_{\mathcal{B}}(v)$ è un autovettore per A (per S_A) di autovalore λ.

Sia $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$. $v \in \mathbb{K}^n$, $v \neq 0$:

$$Av = \lambda v \iff \lambda v - Av = 0_{\mathbb{K}^n} \iff (\lambda \mathbb{1}_n - A)v = 0_{\mathbb{K}^n}$$

Quindi

v è un autovettore di autovalore λ per A

$$\Updownarrow$$

$v \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ e $v \in Ker(\lambda \mathbb{1}_n - A)$

<u>Def</u>: Dato $\lambda \in \mathbb{K}$ definiamo

$$V_\lambda(A) := Ker(\lambda \mathbb{1}_n - A) \underset{\text{vett.}}{\overset{\text{s.sp.}}{\subseteq}} \mathbb{K}^n$$

Se $V_\lambda(A) \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ diciamo che $V_\lambda(A)$ è <u>l'autospazio di autovalore λ</u> di A

<u>Es</u>: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$V_2(A) = \mathrm{Ker}\,(2\mathbb{1}_2 - A) = \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right)$

$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

è l'autospazio di autovalore 2 di A.

$V_4(A) = \mathrm{Ker}\,(4\mathbb{1}_2 - A) = \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right)$

$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\,(2 \;\; -3) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

è l'autospazio di autovalore 4 di A.

$V_1(A) = \mathrm{Ker}\,(\mathbb{1}_2 - A) = \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right)$

$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}.$

$V_1(A)$ non è un autospazio.

$\underline{\text{Es}}$: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{pmatrix}$

$\underline{\text{OSS}}$: $\mathrm{Ker}\,(\lambda \mathbb{1}_n - A) \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\} \iff \det(\lambda \mathbb{1}_n - A) = 0.$

$\underline{\text{Def}}$: Lo <u>spettro</u> di A è l'insieme dei suoi autovalori,

$$Sp(A) = \{ \lambda \in \mathbb{K} \mid \exists\, v \neq 0_{\mathbb{K}^n} : Av = \lambda v \}$$
$$= \{ \lambda \in \mathbb{K} \mid V_\lambda(A) \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\} \}$$
$$= \{ \lambda \in \mathbb{K} \mid \det(\lambda \mathbb{1}_n - A) = 0 \} \subset \mathbb{K}$$

Consideriamo la funzione

$$P_A : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \qquad P_A(x) := \det(x \mathbb{1}_n - A)$$

$$Sp(A) = \{ \lambda \in \mathbb{K} \mid P_A(x) = 0 \} = \{ \text{zeri di } P_A(x) \}.$$

Es: ·) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad P_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-2 & -3 \\ 0 & x-4 \end{pmatrix} = (x-2)(x-4)$

$\Rightarrow Sp(A) = \{2, 4\} \subset \mathbb{R}$.

·) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$P_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{pmatrix} = (x-a)(x-d) - bc$

$Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ TRACCIA di A

$= x^2 - (a+d)x + (ad-bc) = x^2 - Tr(A)x + \det(A)$

è un polinomio monico di grado 2.

(monico = il coefficiente di x^n è 1 dove n è il grado).

$$Sp(A) = \left\{ \frac{Tr(A) \pm \sqrt{Tr(A)^2 - 4\det A}}{2} \right\} \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow Tr(A)^2 - 4\det A \geq 0$$

$$Tr(A)^2 - 4\det A = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc$$

<u>oss</u>: Se $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$S_A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n.$$

Se $\lambda \in Sp(A)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ allora

non ci sono $X \in \mathbb{R}^n$ t.c. $AX = \lambda X$.

$$\underbrace{AX}_{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^n}} \neq \underbrace{\lambda X}_{\substack{\cap \\ \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n}}$$

In particolare, $S_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

non ha autovettori di autovalore λ.

ma ce l'ha in $\mathbb{C}^n$.

Es:
$$R_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$P_{R_\vartheta}(x) = x^2 - 2\cos\vartheta + 1$$

$$Sp(R_\vartheta) = \left\{ \frac{2\cos\vartheta \pm \sqrt{4\cos^2\vartheta - 4}}{2} = \right.$$

$$= \cos\vartheta \pm \sqrt{\cos^2\vartheta - 1}$$

$$= \cos\vartheta \pm \sqrt{-\sin^2\vartheta}$$

$$\left. = \cos\vartheta \pm i\sin\vartheta \right\} \subset \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \sin\vartheta = 0 \Leftrightarrow \vartheta = 0 \text{ o } \vartheta = \pi.$$