Dato $\mathcal{L}: V \to V$ lineare, un s.sp. vettoriale $U \subseteq V$ si dice $\mathcal{L}$-invariante se $\mathcal{L}(U) = \{\mathcal{L}(u) \mid u \in U\} \subseteq U$.

Se $U = \langle v \rangle$ è una retta, U è $\mathcal{L}$-invariante se e solo se $\exists \lambda \in \mathbb{K}$: $\mathcal{L}(v) = \lambda v$.

__Def__: Dato un vettore non-nullo $v \in V$ ed uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$, la coppia (v, λ) si dice una __auto-coppia__ [Meyer] oppure si dice che v è un autovettore di autovalore λ per $\mathcal{L}$ se

$$\mathcal{L}(v) = \lambda v.$$

È vero che $\mathcal{L}$ ammette una retta invariante? In generale, NO, ad es. $R_\vartheta : \mathcal{V}_0^2 \to \mathcal{V}_0^2$.

Per rispondere alla domanda possiamo assumere $V = \mathbb{K}^n$, $\mathcal{L} = S_A$ $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$.

Per ogni scalare $\lambda \in \mathbb{K}$, abbiamo definito il sottospazio

$$V_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(\lambda \mathbb{1}_n - A)$$

$V_\lambda(A) \neq \{0\} \Rightarrow V_\lambda(A) \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\} = \{v \in \mathbb{K}^n \mid Av = \lambda v\}$. Autospazio di autovalore λ. $V_\lambda(A) \neq 0 \iff \det(\lambda \mathbb{1}_n - A) = P_A(\lambda) = 0$.

$\underline{Es}$: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Stabilire per quali $(a,b) \neq (0,0)$ la retta $r: ax+by=0$ è A-invariante.

$\underline{Sol.}$:

$$S_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

r è A-invariante $\Leftrightarrow$ r è generato da un autovettore di A.

$$r = \operatorname{Ker}(a, b) = \left\langle \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b-a \\ -2b-2a \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ è un autovettore di autovalore $\lambda \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -b-a \\ -2b-2a \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -b-a = -\lambda b \\ -2b-2a = -\lambda a \end{cases}$ Se $b=0$ dalla prima eq. otterremmo $a=0$ contro l'ipotesi.

Quindi $b \neq 0$. $\dfrac{-b-a}{b} = -\lambda \Rightarrow \lambda = \dfrac{a}{b} + 1$ (prima eq.)

$$2a+2b = \left(\frac{a}{b}+1\right) a \Rightarrow 2a+2b = \left(\frac{a+b}{b}\right) a$$

$$2ab + 2b^2 = a^2 + ab \Rightarrow \boxed{a^2 - 2b^2 - ab = 0} \quad (*)$$

Poiché $b \neq 0$

$$<\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}> = <\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{b} \end{pmatrix}>.$$

Possiamo assumere $b = 1$.

$(*)$ diventa $a^2 - a - 2 = 0$

$$a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Se $b = 1$, allora $a = 2$ oppure $a = -1$.

Le rette invarianti sono 2:

$$<\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}> \quad e \quad <\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}> = <\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}>.$$

ovvero

$$r: \quad 2x + y = 0 \quad \text{oppure} \quad -x + y = 0.$$

$$P_A(x) = \det(x \mathbb{1}_n - A).$$

$\cdot)$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad P_A(x) = x^2 - \mathrm{Tr}A\ x + \det A$ è un polinomio omogeneo di grado 2.

$\cdot)$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$P_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -2 & -1 \\ 0 & x-2 & -2 \\ 0 & -4 & x-3 \end{pmatrix} = (x-1)\det \begin{pmatrix} x-2 & -2 \\ -4 & x-3 \end{pmatrix}$$

$$= (x-1)\det \begin{pmatrix} x & -2 \\ -x-1 & x-3 \end{pmatrix}$$

$$= (x-1)\det \begin{pmatrix} x & -2 \\ -1 & x-5 \end{pmatrix} = (x-1)\det \begin{pmatrix} 0 & -2+x^2-5x \\ -1 & x-5 \end{pmatrix}$$

$$= -(x-1)\det \begin{pmatrix} -1 & x-5 \\ 0 & x^2-5x-2 \end{pmatrix} = (x-1)(x^2-5x-2)$$

$$Sp(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid P_A(\lambda) = 0\} \qquad x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+8}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$p(\lambda) = 0 \iff (x-\lambda) \mid p(x)$

$\iff \exists\, q(x)$ t.c.

$p(x) = (x-\lambda)\, q(x)$

$$P_A(x) = (x-1)(x^2-5x-2)$$

$$\overset{!}{=} (x-1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3) \quad \text{dove} \quad \lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}, \ \lambda_3 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}$$

$$= x^3 - 6x^2 + 3x + 2$$

è un polinomio monico di grado 3.

$$Sp(A) = \{1, \lambda_2, \lambda_3\}.$$

Prop.: Se $A \in Mat_{3\times3}(\mathbb{K})$,

$$P_A(x) = x^3 - Tr(A)x^2 + \frac{1}{2}\left[Tr(A)^2 - Tr(A^2)\right]x - \det A$$

dim (conto che trovate negli appunti)

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = -4 \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -4 \cdot 5 = -20$$

$Tr A = 5 \qquad (Tr A)^2 = 25$

$$Tr(A^2) = A_1 A^1 + A_2 A^2 + A_3 A^3 = 6 + 11 + 12 = 29$$

$$P_A(x) = x^3 - 5x^2 + \frac{1}{2}(25 - 29)x + 20 =$$

$$= x^3 - 5x^2 - 2x + 20$$

Es: $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$P_A(x) = \det(x\mathbb{1}_3 - A) = \det\begin{pmatrix} x-1 & -3 & -1 \\ -2 & x-1 & -2 \\ 1 & -2 & x-3 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} x & -3 & -1 \\ 0 & x-1 & -2 \\ -x+4 & -2 & x-3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x & -3 & -1 \\ 0 & x-1 & -2 \\ 4 & -5 & x-4 \end{pmatrix}$$

$$= 4\det\begin{pmatrix} x & -3 & -1 \\ 0 & x-1 & -2 \\ 1 & -\frac{5}{4} & \frac{x-4}{4} \end{pmatrix} = 4\det\begin{pmatrix} 0 & -3+\frac{5}{4}x & -1-\frac{x(x-4)}{4} \\ 0 & x-1 & -2 \\ 1 & -\frac{5}{4} & \frac{x-4}{4} \end{pmatrix}$$

$$= 4\det\begin{pmatrix} \frac{5}{4}x-3 & \frac{-4-x^2+4x}{4} \\ x-1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 5x-12 & -4-x^2+4x \\ x-1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} x^2+x-8 & -x^2+4x-4 \\ x+1 & -2 \end{pmatrix} = -2(x^2+x-8) + (x+1)(x^2-4x+4)$$

$$-2(x^2+x-8)+$$
$$+(x+1)(x^2-4x+4)$$

$$= -2x^2-2x+16+x^3-4x^2+4x+x^2-4x+4$$

$$= x^3-5x^2-2x+20$$

Prop.: Sia $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$, $P_A(x) = \det(x\mathbb{1}_n - A)$ è un polinomio monico di grado n della forma

$$P_A(x) = x^n - \operatorname{Tr} A\, x^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A.$$

Def: $P_A(x)$ si chiama il polinomio caratteristico di A.

COR: $|Sp(A)| \leq n$.

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, allora $\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ distinti e $m_1, \dots, m_k > 0$ t.c.

$$P_A(x) = (x-\lambda_1)^{m_1} \cdots (x-\lambda_k)^{m_k}.$$

$$Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}.$$

m_i = molteplicità algebrica dell'autovalore λ_i.

dim: Teorema fondamentale dell'algebra.

OSS1: $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\lambda \in Sp(A)$.
allora A non ha autovettori di autovalore λ in $\mathbb{R}^n$ (ma solo in $\mathbb{C}^n$)
Infatti, se $X \in \mathbb{R}^n$ fosse autovettore di autovalore λ allora

$$\underbrace{AX}_{\mathbb{R}^n} = \underset{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}{\lambda}\,\underset{\mathbb{R}^n}{X} \in (\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})^n \quad \text{controddizione.}$$

OSS2: Se $A \in Mat_{m\times m}(\mathbb{R})$ allora $P_A(x) = \det(x\,\mathbb{1}_n - A)$ è un polinomio a coefficienti reali.
Se λ è un autovalore anche $\bar{\lambda}$ è un autovalore.

$$P_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$$

$$0 = P_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

$$\Rightarrow 0 = \overline{P_A(\lambda)} = \bar{\lambda}^n + a_{n-1}\bar{\lambda}^{n-1} + a_{n-2}\bar{\lambda}^{n-2} + \dots + a_1\bar{\lambda} + a_0 = P_A(\bar{\lambda})$$

$\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$ $\quad \bar{a}_i = a_i$
$\overline{ab} = \bar{a}\,\bar{b}$

Es 4.1.1. (Esercizi):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -4 & -7 & 2 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolare $Sp(A)$.

Sol.: $Sp(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid p_A(\lambda) = 0 \}$.

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -4 & -1 \\ 4 & x+7 & -2 \\ -6 & -6 & x \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & -4 & -1 \\ 6 & x+7 & -2 \\ -6-x & -6 & x \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} x & -4 & -1 \\ 6 & x+7 & -2 \\ -6 & -10 & x-1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & -4 & -1 \\ 6 & x+7 & -2 \\ 0 & x-3 & x-3 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} x & -3 & -1 \\ 6 & x+9 & -2 \\ 0 & 0 & x-3 \end{pmatrix} = (x-3) \det \begin{pmatrix} x & -3 \\ 6 & x+9 \end{pmatrix}$$

$$= (x-3) \det \begin{pmatrix} x+3 & -3 \\ -x-3 & x+9 \end{pmatrix} = (x-3) \det \begin{pmatrix} x+3 & -3 \\ 0 & x+6 \end{pmatrix}$$

$$= (x-3)(x+3)(x+6). \qquad Sp(A) = \{3, -3, -6\}.$$

Diagonalizzazione di un endomorfismo lineare

Un endomorfismo lineare $\mathcal{L}: V \to V$ si dice **diagonalizzabile** se esiste una base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ di V nella quale la matrice che rappresenta $\mathcal{L}$ è diagonale.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\mathcal{L}} & V \\ F_{\mathcal{B}} \downarrow & & \downarrow F_{\mathcal{B}} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{S_D} & \mathbb{K}^n \end{array}$$

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \left(F_{\mathcal{B}}(\mathcal{L}(v_1)) \middle| \cdots \middle| F_{\mathcal{B}}(\mathcal{L}(v_n)) \right)$$

$$\boxed{\mathcal{L}(v_i) = \lambda_i v_i \quad \forall i = 1, \dots, n.}$$

$\mathcal{L}$ è diagonalizzabile se

esiste una base di V composta di autovettori per $\mathcal{L}$.

Se $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$. diciamo che A

- è <u>diagonalizzabile su $\mathbb{R}$</u> se $S_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile.

- è <u>diagonalizzabile su $\mathbb{C}$</u> se $S_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ è diagonalizzabile.

Sia $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$)

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di $\mathbb{R}^n$ composta di autovettori per A.

Sia $B = (v_1 | \cdots | v_n)$.

$$A v_i = \lambda_i v_i$$

Sia $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "S_A"] \arrow[d, "S_{B^{-1}} = F_{\mathcal{B}}"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "F_{\mathcal{B}} = S_{B^{-1}}"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "S_D"] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

$$D = B^{-1} A B$$

$P_A(x) = P_D(x)$.

Prop.: Siano $A, C \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$. Sia B una matrice invertibile t.c. $C = B^{-1}AB$. Allora

$$P_C(x) = P_A(x).$$

dim:

$$P_C(x) = \det(x\mathbb{1}_n - C) = \det(x\mathbb{1}_n - (B^{-1}AB))$$

$$= \det(x(B^{-1}B) - B^{-1}AB)$$

$$= \det(B^{-1}(x\mathbb{1}_n - A)B)$$

$$\overset{\text{Binet}}{=} \det B^{-1} \det(x\mathbb{1}_n - A)\det B = \det(x\mathbb{1}_n - A)$$

$$= P_A(x).$$

Def: $C = B^{-1}AB$ allora A e C si dicono <u>simili</u>.

Molteplicità geometrica di un autovalore

Sia $\lambda \in Sp(A)$.

$$V_\lambda(A) = \ker(\lambda \mathbb{1}_n - A)$$

<u>Def</u>: La <u>molteplicità geometrica</u> di λ (rispetto ad A) è la dimensione di $V_\lambda(A)$.

$$mg_A(\lambda) := \dim V_\lambda(A) = \dim \ker(\lambda \mathbb{1}_n - A)$$
$$= n - rg(\lambda \mathbb{1}_n - A).$$

$$P_A(x) = (x-\lambda_1)^{m_1} \cdots (x-\lambda_k)^{m_k}$$

m_i = molteplicità algebrica di λ_i

$=: ma_A(\lambda_i)$

Es. 4.1.2 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & x-1 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & x+1 \end{pmatrix}$$

$$= (x-1) \det \begin{pmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ 2 & x-1 & -1 \\ -4 & 0 & x+1 \end{pmatrix}$$

$$= (x-1)^2 \det \begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ 0 & x+1 \end{pmatrix}$$

$$= (x-1)^3 (x+1) \Rightarrow Sp(A) = \{1, -1\}$$

$$ma_A(1) = 3, \quad ma_A(-1) = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$mg_A(1) = \dim \operatorname{Ker}(\mathbb{1}_4 - A) = \dim \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \dim \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3$$

$$\mathcal{B}_{V_1(A)} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$mg_A(-1) = \dim \operatorname{Ker}(-\mathbb{1}_4 - A) = \dim \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \dim \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} = 1$$

$$\mathcal{B}_{V_{-1}(A)} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$