sia $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$.

$P_A(x) := \det(x \mathbb{1}_n - A)$ è un polinomio monico di grado n e si chiama il polinomio caratteristico di A.

$Sp(A) = \{\text{autovalori di } A \text{ in } \mathbb{K}\} = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid P_A(\lambda) = 0\}$

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $P_A(x) = (x-\lambda_1)^{m_1} \cdots (x-\lambda_k)^{m_k}$ per opportuni $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ distinti, $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$.

m_i = molteplicità algebrica di $\lambda_i =: \boxed{ma_A(\lambda_i)}$.

Per $\lambda \in Sp(A)$, $V_\lambda(A) = \ker(\lambda \mathbb{1}_n - A)$ = autospazio di autovalore λ per A. $\boxed{mg_A(\lambda)} := \dim V_\lambda(A)$ = molteplicità geometrica dell'autovalore λ.

Se $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ $V_\lambda(A) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Prop. : Per ogni $\lambda \in Sp(A)$,

$$mg_A(\lambda) \leq ma_A(\lambda).$$

dim: Supponiamo che $\lambda \in \mathbb{K}$. Allora $V_\lambda(A) \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\}$.
Sia $(v_1, \dots, v_k) = \mathcal{B}_{V_\lambda(A)}$ una base di $V_\lambda(A)$.
$(k = mg_A(\lambda))$. Estendiamola ad una base di $\mathbb{K}^n$:

$$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n).$$

Osserviamo che $Av_i = \lambda v_i \quad \forall i = 1, \dots, k$.
Sia C la matrice che rappresenta S_A in questa base $\mathcal{B}$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "S_A"] \arrow[d, "S_{B^{-1}} = F_{\mathcal{B}}"'] & \mathbb{K}^n \arrow[d, "F_{\mathcal{B}} = S_{B^{-1}}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "S_C"] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

$C^i = F_{\mathcal{B}}(Av_i), \forall i = 1, \dots, n$. Quindi $C = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathbb{1}_k & T \\ \hline 0 & Z \end{array}\right)$

Osserviamo che $B^{-1}AB = C$.
dove $B = (v_1 | \cdots | v_n)$. $P_A(x) = P_C(x) = (x-\lambda)^k P_Z(x)$
$\Rightarrow k \leq ma_A(\lambda)$. ∎

Es: •) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2$. $\quad P_A(x) = (x-1)^2$

•) $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$. $\quad P_D(x) = \det \begin{pmatrix} x-\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x-\lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x-\lambda_n \end{pmatrix} =$

$= (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$

$Sp(D) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$

$ma_D(\lambda) = \#\{i \mid d_{ii} = \lambda\}$.

$D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \qquad ma_D(1) = 2, \quad ma_D(2) = 1.$

•) $U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}$. $\quad P_U(x) = (x-u_{11})(x-u_{22})\cdots(x-u_{nn})$

$Sp(U) = \{u_{11}, \dots, u_{nn}\}$. $\quad ma_U(\lambda) = \#\{i \mid u_{ii} = \lambda\}$.

$U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 100 \\ 0 & 1 & 50 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad Sp(U) = \{1, 2\}. \quad ma_U(1) = 2, \; ma_U(2) = 1.$

<u>Es</u>: $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$Sp(U) = \{1, 2\}$. $ma_U(1) = 2$, $ma_U(2) = 1$.

$\Rightarrow$ $mg_U(2) = 1$. Infatti, $0 < mg_U(2) \leq ma_U(2) = 1$.

$$mg_U(1) = \dim \operatorname{Ker}(\mathbb{1}_3 - U) =$$

$$= \dim \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \dim \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

$$\mathcal{B}_{V_1(U)} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \Rightarrow mg_U(1) < ma_U(1).$$

Blocco di Jordan di autovalore λ

$\lambda \in \mathbb{K}$. Sia $n \geq 1$.

$$J_n(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

<u>Es</u>:

$$J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_4(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$Sp(J_n(\lambda)) = \{\lambda\}$. $\quad ma_{J_n(\lambda)}(\lambda) = n$

$$mg_{J_n(\lambda)}(\lambda) = \dim \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \vdots & & & & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$\mathcal{B}_{V_\lambda(J_n(\lambda))} = (e_1)$. $\quad$ Se $n > 1$, $\quad mg_{J_n(\lambda)}(\lambda) < ma_{J_n(\lambda)}(\lambda)$.

<u>Es</u>: $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ Allora

$$De_i = \lambda_i e_i \qquad \forall i = 1, \dots, n.$$

$$mg_D(\lambda) = \dim V_\lambda(D) = \text{Span}(e_i \mid De_i = \lambda e_i)$$

$$= \# \{ i \mid d_{ii} = \lambda \} = ma_D(\lambda).$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \qquad De_1 = 2e_1, \; De_2 = 2e_2, \; De_3 = 3e_3$$

$$V_2(D) = \langle e_1, e_2 \rangle$$

$$V_3(D) = \langle e_3 \rangle$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} V_2(D) &= \langle e_1, e_3 \rangle \\ V_3(D) &= \langle e_2 \rangle. \end{aligned}$$

Se $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ diagonalizzabile (su $\mathbb{K}$).

$\exists\ \mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n) \underset{\text{base}}{\subset} \mathbb{K}^n$ t.c.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "S_A"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] & \mathbb{K}^n \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "S_D"] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

commuta e $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

$\Rightarrow Sp(A) = Sp(D)$ ed inoltre $\forall \lambda \in Sp(A) = Sp(D)$

$$mg_A(\lambda) = mg_D(\lambda)$$

(perché $F_{\mathcal{B}}(V_\lambda(A)) = V_\lambda(D)$ e $F_{\mathcal{B}}$ è un isomorfismo).

<u>OSS</u>: A diagonalizzabile $\Rightarrow mg_A(\lambda) = ma_A(\lambda)$. $\forall \lambda \in Sp(A)$.

<u>Teorema</u>: Sia $A \in Mat_{n\times n}$. $S_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ è diagonalizzabile se e solo se

1) $Sp(A) \subset \mathbb{K}$

2) $mg_A(\lambda) = ma_A(\lambda) \quad \forall \lambda \in Sp(A)$.

<u>dim</u>:

Se A è diagonalizzabile su $\mathbb{K}$, allora $Sp(A) = Sp(D) \subset \mathbb{K}$ e $mg_A(\lambda) = mg_D(\lambda) \quad \forall \lambda \in Sp(A)$

dove $D = B^{-1}AB = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

<u>Viceversa</u>: $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_K\}$ $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$.

$$V_{\lambda_i}(A) \cap V_{\lambda_j}(A) = \{0_{\mathbb{K}^n}\} \quad \forall \lambda_i \neq \lambda_j.$$

$$W = V_{\lambda_1}(A) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_K}(A) \subset \mathbb{K}^n.$$

$$\dim W = mg_A(\lambda_1) + \dots + mg_A(\lambda_K) \overset{(2)}{=} ma_A(\lambda_1) + \dots + ma_A(\lambda_K) = n$$

$$\mathbb{K}^n = V_{\lambda_1}(A) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}(A) \qquad (*)$$

Sia $\mathcal{B}_{\lambda_i}$ una base di $V_{\lambda_i}(A)$ $\forall i = 1, \dots, k$.

$\underset{(*)}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{B}_{\lambda_1} \cup \dots \cup \mathcal{B}_{\lambda_k} = \mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{K}^n$ composta di autovettori per A. La matrice associata ad S_A in questa base è

$$D = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
\begin{matrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1\end{matrix} & & & & \\
\hline
 & \begin{matrix}\lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_2\end{matrix} & & & \\
\hline
 & & \begin{matrix}\lambda_3 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_3\end{matrix} & & \\
\hline
 & & & \ddots & \\
\hline
 & & & & \begin{matrix}\lambda_k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k\end{matrix}
\end{array}\right)$$

Per stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{K}$

1) Calcolare $Sp(A)$ come le radici di $P_A(x)$

2) Verificare che $Sp(A) \subset \mathbb{K}$

3) $\forall \lambda \in Sp(A) \quad mg_A(\lambda) = ma_A(\lambda)$.

In questo caso per trovare una base diagonalizzante (ovvero composta di autovettori)

Troviamo una base $\mathcal{B}_{\lambda_i}$ di ogni autospazio.

<u>Es</u>: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad P_A(x) = x^2 - \mathrm{Tr}A\, x + \det A =$
$= x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$

$Sp(A) = \{3, -3\} \subset \mathbb{R}$. $mg_A(-3) = 1 = ma_A(-3) = mg_A(3) = ma_A(3)$.

$\Rightarrow A$ è diagonalizzabile su $\mathbb{K}$.

$$\left.\begin{aligned} V_3(A) &= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\,(1, -5) = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ V_{-3}(A) &= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\,(1\ 1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}\right] \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

OSS: $\lambda \in Sp(A)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, $ma_A(\lambda) = 1 \Rightarrow mg_A(\lambda) = 1$.

COR: Se gli autovalori di A sono in $\mathbb{K}$ e sono tutti distinti allora A è diagonalizzabile su $\mathbb{K}$.

OSS: $\mathcal{L}: V \to V$ è diagonalizzabile se e solo se ogni matrice associata ad $\mathcal{L}$ in una base (sia in partenza che in arrivo) è diagonalizzabile.

Es: 4.1.1 Stabilire se $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -4 & -7 & 2 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile e in tal caso trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D t.c. $B^{-1}AB = D$.

Sol.:

$$P_A(x) = x^3 - \operatorname{Tr}A\, x^2 + \frac{1}{2}\left((\operatorname{Tr}A)^2 - \operatorname{Tr}(A^2)\right)x - \det A.$$

$$\operatorname{Tr}A = -6, \quad \det A = \det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -6 & -15 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -6 & -15 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= 6 \det\begin{pmatrix} -1 & -15 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = 6 \det\begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = +54$$

$$\operatorname{Tr}A^2 = -9 + 45 + 18 = 54$$

$$P_A(x) = x^3 + 6x^2 + \frac{1}{2}(36 - 54)x - 54 =$$

$$= x^3 + 6x^2 - 9x - 54 = x^2(x+6) - 9(x+6)$$

$$= (x+6)(x^2 - 9) = (x+6)(x+3)(x-3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -4 & -7 & 2 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad p_A(x) = (x+6)(x+3)(x-3)$$

$Sp(A) = \{-6, -3, 3\}$. Poiché A è 3×3 ed ha 3 autovalori distinti A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

$$V_{-6}(A) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -7 & -4 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ -6 & -6 & -6 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & +1 \\ -7 & -4 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$x_1 = x_3$$
$$x_2 = -2x_3$$

$$= \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_{-3}(A) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -4 & -4 & -1 \\ 4 & 4 & -2 \\ -6 & -6 & -3 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_3(A) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 4 & 10 & -2 \\ -6 & -6 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \underset{\uparrow}{0} \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(Verificare $A B^i = \lambda_i B^i$).

Es: $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. $\quad \mathcal{L}: V \to V$

$$\mathcal{L}(p) = p'(x^2+2).$$

Stabilire se $\mathcal{L}$ è diagonalizzabile.

Sol.: Sia A la matrice associata a $\mathcal{L}$ nella base standard $\mathcal{C} = (1, x, x^2)$.

$$\mathcal{L}(1) = 0$$
$$\mathcal{L}(x) = 1 \qquad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
$$\mathcal{L}(x^2) = 2(x^2+2) = 2x^2+4$$

$$Sp(A) = \{0, 2\} \qquad ma_A(0) = 2, \quad ma_A(2) = 1.$$

$$V_0(A) = \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \langle e_1 \rangle$$

$$\Rightarrow \quad mg_A(0) = 1 < ma_A(1) = 2$$

$\Rightarrow$ A non è diagonalizzabile $\Rightarrow$ $\mathcal{L}$ non è diagonalizzabile.

<u>Es</u>: $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. $\mathcal{L}: V \longrightarrow V$

$$\mathcal{L}(p) = p'(x^2+2) - p'(x^2)$$

Stabilire se è diagonalizzabile.

<u>Sol.</u>: A = nella base canonica.

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}(1) &= 0 \\ \mathcal{L}(x) &= 0 \\ \mathcal{L}(x^2) &= 2(x^2+2) - 2x^2 = 4 \end{aligned}\right] \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim \operatorname{Ker} A = 2$, $ma_A(0) = 3$. $\Rightarrow$ non è diagonalizzabile.

Se A è diagonalizzabile,

$$B^{-1} A B = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

allora

$$A = B D B^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{A^n = B D^n B^{-1}} \qquad D^n = \mathrm{diag}(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_n^n)$$

$$A^2 = (B D \cancel{B^{-1}})(\cancel{B} D B^{-1}) = B D^2 B^{-1}$$

$$\exp(A) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k$$

Es 4.1.4 : $A = \begin{pmatrix} 5/2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Calcolare A^n $\forall n \geq 1$.

Sol. :

$$P_A(x) = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}$$

$Sp(A) = \{1, \frac{1}{2}\}$. Poiché $|Sp(A)| = 2$, $Sp\,A \subset \mathbb{R}$, A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

$$V_1(A) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -3/2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_{\frac{1}{2}}(A) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad B^{-1} A B = D$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad B^{-1} A B = D$$

$$A = B D B^{-1}$$

$$A^n = B D^n B^{-1} \rightsquigarrow D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{-n} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2^{-n} \\ 3 & 2^{-n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 3 \cdot 2^{-n} & -2 + 2^{-n+1} \\ 6 - 3 \cdot 2^{-n+1} & -3 + 2^{-n+2} \end{pmatrix}$$