Geometria affine

Studio della posizione reciproca di oggetti geometrici (Parallelismo e intersezione).

oggetti geometrici: sottospazi affini di uno spazio vettoriale, "analogo algebrico dei concetti di punto, retta, piano in geometria euclidea".

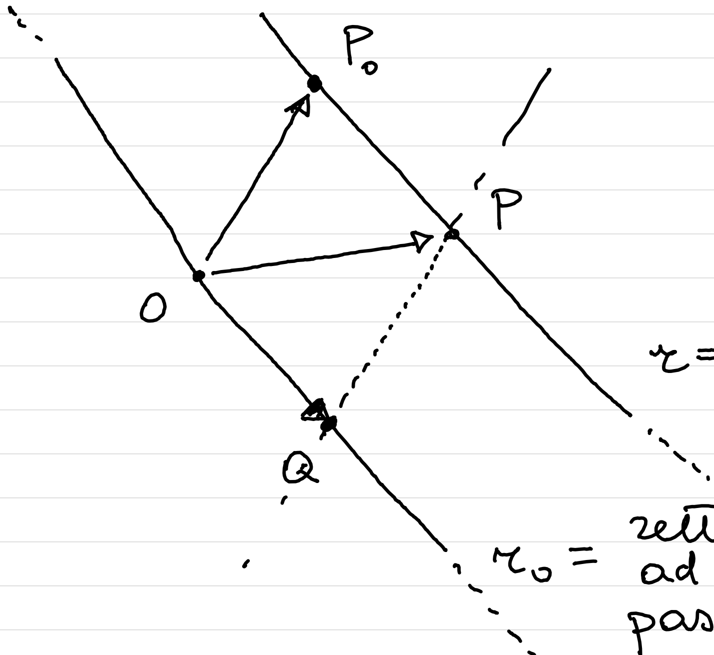
Def: Un sottospazio affine di uno spazio vettoriale V è un sottoinsieme $W \subseteq V$ della forma

$$W = X_0 + W_0 = \{X_0 + w \mid w \in W_0\}.$$

per un dato $X_0 \in V$ e $W_0 \subseteq V$ sottospazio vettoriale.

oss: $X_0 = X_0 + \underbrace{0_V}_{0_V \in W_0} \in W$

Es: $V = \mathcal{V}_0^2$.



$\mathcal{V}_0^2 \cup r = \{\vec{OP} \mid P \in r\}$

$r_0 =$ retta parallela ad r e passante per O.

$\forall P \in r \quad \exists\, v = \vec{OQ} \in r_0$ t.c. $\vec{OP} = \vec{OP_0} + \vec{OQ}$.

Sia $Q \in \mathcal{E}^2$ t.c. $\vec{OQ} \equiv \vec{P_0P}$

allora $Q \in r_0$. Inoltre

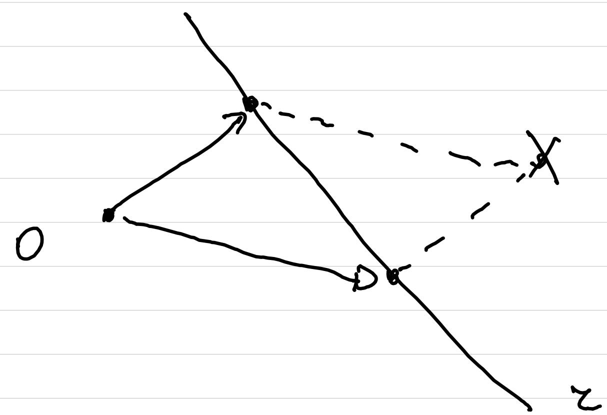
$$\vec{OQ} \equiv \vec{P_0P} = \vec{OP} - \vec{OP_0} \Rightarrow \boxed{\vec{OP} = \vec{OP_0} + \vec{OQ}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{r = \vec{OP_0} + r_0}$$

è un s.sp. affine.

I <u>sottospazi affini</u> sono traslati di sottospazi vettoriali.



r non è chiuso per somma

$W = X_0 + W_0 \subset V$

·) W è un s.sp. vett. $\Leftrightarrow X_0 \in W_0$.

·) W_0 è <u>univocamente determinato</u> da W. Infatti,

$$W = X_0 + W_0 = Y_0 + W_0' \Rightarrow W_0 = W_0'$$

$$Y_0 = Y_0 + \underset{0_V \in W_0'}{0_V} \in Y_0 + W_0' = X_0 + W_0$$

Quindi $\exists\, w_0 \in W_0$ t.c. $Y_0 = X_0 + w_0$

$$\Rightarrow Y_0 - X_0 = w_0 \in W_0.$$

Similmente $X_0 - Y_0 \in W_0'$.

$\forall\, w_0 \in W_0 \ \exists\, w_0' \in W_0'$ t.c. $X_0 + w_0 = Y_0 + w_0'$

$$\Rightarrow w_0 = Y_0 - X_0 + w_0' = -\underbrace{(X_0 - Y_0)}_{\in W_0'} + \underset{W_0'}{\underset{\in}{w_0'}} \in W_0'$$

$$\Rightarrow W_0 \subseteq W_0'$$

Similmente $W_0' \subseteq W_0$.

<u>Def</u>: W_0 si chiama il <u>sottospazio di giacitura</u> di W.

$\mathcal{B}_{W_0} = (v_1, \dots, v_K) \overset{\text{base}}{\subset} W_0$, $v_1, \dots, v_K$ <u>vettori direttori</u> di W.

Come sono fatti i sottospazi affini di $\mathbb{K}^n$?

"Sono le soluzioni di un sistema lineare".

Ricordiamo che se $AX=b$ è un sistema lineare di m equazioni in n incognite allora

è risolubile $\Leftrightarrow rg(A|b) = rg\,A$

In questo caso le soluzioni sono

$$W = X_0 + \mathrm{Ker}\,A$$

dove X_0 è un vettore t.c. $AX_0 = b$.

$\mathrm{Ker}\,A$ sono le soluzioni del sistema omogeneo associato

$$AX = 0_{\mathbb{K}^m}$$

$\Rightarrow W$ è un s.sp. affine di $\mathbb{K}^n$ con giacitura $W_0 = \mathrm{Ker}\,A$.

Es: $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3$.

è un sottospazio vettoriale.

Sia $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Per quali $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ $b \in W$?

$b \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \iff \exists\, t \in \mathbb{R}$ t.c. $b = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\iff$ il sistema $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} t = b$ è risolubile.

$$\iff \operatorname{rg} \left(\begin{array}{c|c} 1 & b_1 \\ 2 & b_2 \\ 3 & b_3 \end{array} \right) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1$$

$\iff$

$$1 = \operatorname{rg} \left(\begin{array}{c|c} 1 & b_1 \\ 2 & b_2 \\ 3 & b_3 \end{array} \right) = \operatorname{rg} \left(\begin{array}{c|c} 1 & b_1 \\ 0 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & b_3 - 3b_1 \end{array} \right)$$

$$\iff \begin{cases} b_2 - 2b_1 = 0 \\ b_3 - 3b_1 = 0 \end{cases}$$

$$W : \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ -3x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Eq. cartesiane di W.

$$W = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema: Sia $W_0 \subset \mathbb{K}^n$ un sottospazio vettoriale, $\dim W_0 = k$. Allora esiste una matrice

$$C \in Mat_{(n-k)\times n}(\mathbb{K})$$

t.c.

1) $W_0 = \ker C$
2) $rg\, C = n-k$ (è massimo)

Per trovare C:

i) Si trova una base $\mathcal{B}_{W_0} = (v_1, .., v_k)$ di W_0.

ii) Definiamo $A = (v_1 | \cdots | v_k) \in Mat_{n\times k}(\mathbb{K})$ ($rg\, A = k$ è massimo)

iii) $$(A \mid \mathbb{1}_n) \underset{R}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{c|c} \overset{\text{a scala}}{S'} & B \\ \hline 0_{(n-k)\times k} & C \end{array}\right)$$

riduciamo a scala A

Def: $W_0 = \ker C$: <u>Equazioni cartesiane di W_0</u>

Es: $W_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

C

$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è t.c. $W_0 = \operatorname{Ker} C$

$$W_0 : \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ -3x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

OSS: C non è unica.

OSS: Invece di lavorare con $(A \mid \mathbb{1}_n)$ conviene lavorare con

$$(A \mid X)$$

dove $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Es: $W_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle < \mathbb{R}^3$ Trovare eq. cartesiane per W_0:

Sol.: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & x_3 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{W_0 : x_2 - x_1 = 0}$

OSS: Per descrivere un sottospazio vettoriale di dimensione k di $\mathbb{K}^n$ servono $n-k$ equazioni.

Es:

W_0: $ax+by+cz=0$ con $(a,b,c)\neq(0,0,0)$

$\dim W_0 = 2$

Def: Sia $W = X_0 + W_0$ un s.sp. affine.
La dimensione di W è

$$\dim W := \dim W_0.$$

Se $\dim W = 0$, allora $W=\{X_0\}$ è PUNTO.
Se $\dim W=1$, allora W si chiama RETTA.
Se $\dim W=2$, allora W si chiama PIANO
Se $\dim W = \dim V-1$, allora W si chiama IPERPIANO.
Un iperpiano si descrive con 1 sola equazione.

COR: Sia $W = X_0 + W_0 \subset \mathbb{K}^n$ un s.sp. affine. Siano $W_0 = \operatorname{Ker} C$ le eq. cartesiane di W_0. Allora

$$W : CX = CX_0$$ Eq. cartesiane di W

Es: $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$.

$$W_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = \operatorname{Ker} C$$

dove $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$W : CX = CX_0 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$W : \begin{cases} -2x_1 + x_2 = -1 \\ -3x_1 + x_3 = -2 . \end{cases}$$

Parallelismo:

Def: Due sottospazi affini

$U = X_0 + U_0$ e $W = Y_0 + W_0 \subset V$

si dicono paralleli se

$U_0 \subseteq W_0$ oppure $W_0 \subseteq U_0$.

Es: le rette $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

sono parallele. Perché

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Es: Il piano $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

e la retta

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

sono paralleli.

Infatti, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Condizioni di parallelismo in $\mathbb{R}^2$

$U = X_0 + U_0$ e $W = Y_0 + W_0 \subset \mathbb{R}^2$.

U e W rette:

1) Sia U che W in forma parametrica.

$U = X_0 + \langle v_1 \rangle \qquad W = Y_0 + \langle v_2 \rangle$

(per ipotesi $v_1 \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ e $v_2 \neq 0_{\mathbb{R}^2}$).

$$U \parallel W \iff \langle v_1 \rangle = \langle v_2 \rangle$$

$$\iff v_1 \in \langle v_2 \rangle$$

$$\iff rg(v_1 | v_2) = 1$$

$$\iff \det(v_1 | v_2) = 0$$

2) $U = X_0 + \langle v_1 \rangle$, $\quad W : AX = b$

$(v_1 \neq 0_{\mathbb{R}^2}, \quad A = (a_1, a_2) \neq (0,0))$

$$U \parallel W \iff \langle v_1 \rangle \subseteq \operatorname{Ker} A$$

$$\iff A v_1 = 0_{\mathbb{R}}.$$

Es: $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad W: 2x + 3y = 1$

$(2,3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \neq 0 \implies U \nparallel W$

Es:

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad W: 2x+3y=1$$

$$(2,3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad U \not\parallel W.$$

$$\det \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ x-1 & & & \\ 1 & & A' & \\ 2 & & & \end{pmatrix} = x \det A'$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & x_2-x_1 \\ 0 & 1 & x_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_3 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{x_2-x_1} \end{array}\right)$$

!

$$x_2 - x_1 = 0$$