Geometria affine

Sottospazio affine di V di dimensione K

$=$

"traslato di un K-sottospazio vettoriale di V

$=$

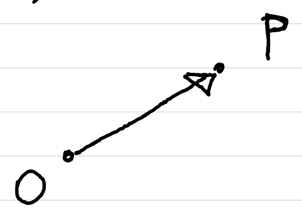
$U = X_0 + U_0$, dove $X_0 \in V$, $U_0 \subseteq V$ s.sp. vett. $\dim U_0 = K$

$=$

Se $V = \mathbb{K}^n$, soluzioni di un sistema lineare in n variabili di $n-K$ equazione.

punto $\Longleftrightarrow$ $K=0$

In $V = V_0^2$, $P \in \mathcal{E}^2$ diventa $\{\overrightarrow{OP}\}$



$P \longleftrightarrow \overrightarrow{OP}$

punto vettore-posizione di P

retta $\Longleftrightarrow$ $K=1$

piano $\Longleftrightarrow$ $K=2$

iperpiano $\Longleftrightarrow$ $K = \dim V - 1$.

$U = X_0 + U_0$ e $W = Y_0 + W_0$ sono paralleli se $U_0 \subseteq W_0$ oppure $W_0 \subseteq U_0$.

Es: Se U e W sono due punti, allora $U_0 = W_0 = \{0_V\}$ e quindi sono paralleli.

Intersezione di sottospazi affini

$U = X_0 + U_0$, $W = Y_0 + W_0 \subset V$ s.sp. affini.

$$\boxed{U \cap W \neq \emptyset \iff X_0 - Y_0 \in U_0 + W_0}$$

(condizione di incidenza)

Infatti, se $U \cap W \neq \emptyset$ e sia $P \in U \cap W$.

Quindi $\exists\, u_0 \in U_0$ e $\exists\, w_0 \in W_0$ t.c.

$$P = X_0 + u_0 = Y_0 + w_0$$

$$\Rightarrow X_0 - Y_0 = \underbrace{w_0}_{\in W_0} \underbrace{-u_0}_{\in U_0} \in W_0 + U_0$$

Viceversa,

se $X_0 - Y_0 = u_0 + w_0$ allora

$$\underbrace{X_0 - u_0}_{\in U} = \underbrace{Y_0 + w_0}_{\in W} \in U \cap W.$$

$\blacksquare$

Geometria affine del piano ($=\mathbb{R}^2$)

Posizione reciproca punto-retta

$\mathcal{P} = \{P\} + \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, $r = X_0 + r_0 \subset \mathbb{R}^2$ retta.

$\mathcal{P} \parallel r \iff 0_{\mathbb{R}^2} \in r_0$ quindi sempre.

$P \in r \iff P - X_0 \in r_0 + \{0_V\} = r_0$

$\iff P \in X_0 + r_0$.

·) $r: \; ax + by = c$ con $(a,b) \neq (0,0)$

$P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in r \iff a x_0 + b y_0 = c$.

·) $r = Y_0 + \langle v \rangle$ con $v \neq 0_{\mathbb{R}^2}$.

$P \in r \iff P - Y_0 \in \langle v \rangle$

$\iff \operatorname{rg}(v \mid P - Y_0) = \operatorname{rg}(v) = 1$

$\iff \det(v \mid P - Y_0) = 0$.

Es: $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad r = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$P \in r \iff \det(P - Y_0 \mid v) = 0$

$\det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$

$\Rightarrow P \notin r$.

Posizione reciproca retta-retta

$r_1 = X_1 + \langle v_1 \rangle$, $r_2 = X_2 + \langle v_2 \rangle \subset \mathbb{R}^2$

due <u>rette</u>. $(v_1 \neq 0_{\mathbb{R}^2},\ v_2 \neq 0_{\mathbb{R}^2})$.

•) $r_1 = X_1 + \langle v_1 \rangle$, $r_2 = X_2 + \langle v_2 \rangle$.

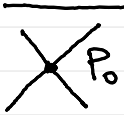
$$r_1 \parallel r_2 \iff \langle v_1 \rangle = \langle v_2 \rangle \iff rg(v_1 | v_2) = 1$$

$$\iff \det(v_1 | v_2) = 0$$

$$r_1 \cap r_2 \neq \emptyset \iff X_1 - X_2 \in \langle v_1 \rangle + \langle v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$$

$$\iff (v_1 | v_2) X = X_1 - X_2 \text{ è risolubile}$$

$$\iff rg(v_1\, v_2 | X_1 - X_2) = rg(v_1\, v_2)$$

	$rg(v_1\, v_2)$	$rg(v_1\, v_2 \mid X_1 - X_2)$
$r_1 \equiv r_2$	1	1
	1	2
	2	2

dove $P_0 = r_1 \cap r_2$ si trova : sia $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$ l'unica soluzione di $(v_1\, v_2)\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = X_1 - X_2$

allora $P_0 = X_1 - t_1 v_1 = X_2 + t_2 v_2$.

$$\mathrm{rg}\,(v_1\ v_2) = \mathrm{rg}\,(v_1\ v_2 \mid X_1 - X_2) = 2$$

$\Rightarrow$ $(v_1\,v_2)X = X_1 - X_2$ ha un'unica soluzione.

Sia $\binom{t_1}{t_2}$ questa soluzione. Allora

$$t_1 v_1 + t_2 v_2 = (v_1\ v_2)\binom{t_1}{t_2} = X_1 - X_2$$

$$\Rightarrow \quad X_2 + t_2 v_2 = X_1 - t_1 v_1 \in r_1 \cap r_2 .$$

<u>Es</u>: Stabilire la pos. reciproca di

$$r_1 = \binom{1}{1} + \left\langle \binom{1}{2} \right\rangle \quad \text{e} \quad r_2 = \binom{1}{2} + \left\langle \binom{2}{-1} \right\rangle.$$

<u>Sol.</u>:

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \text{le rette}$$

non sono parallele e quindi si intersecano.

$$\Rightarrow \mathrm{rg}\,(v_1\ v_2 \mid X_1 - X_2) = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{array}\right) = 2$$

Sia $\binom{t_1}{t_2}$ l'unica soluzione di $(v_1, v_2)\binom{t_1}{t_2} = X_1 - X_2$

$$t_1 = \frac{1}{(-5)} \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{2}{5}$$

$$t_2 = \frac{1}{(-5)} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}$$

$$-\frac{2}{5} v_1 + \frac{1}{5} v_2 = X_1 - X_2 \Rightarrow P_0 = X_1 + \frac{2}{5} v_1 = X_2 + \frac{1}{5} v_2$$

$$P_0 = \binom{1}{1} + \frac{2}{5}\binom{1}{2} = \begin{pmatrix} 7/5 \\ 9/5 \end{pmatrix} = \binom{1}{2} + \frac{1}{5}\binom{2}{-1}$$

•) $r_1 : ax+by=c$, $r_2 = X_2 + \langle v_2 \rangle$

(con $(a,b) \neq (0,0)$).

$$r_1 \parallel r_2 \iff v_2 \in \mathrm{Ker}(a,b) = (r_1)_0$$

$$\iff (a,b)\,v_2 = 0 .$$

$$r_1 \cap r_2 \neq \emptyset \overset{(!)}{\iff} X_1 - X_2 \in \mathrm{Ker}(a,b) + \langle v_2 \rangle$$

$$\iff c - (a\ b)X_2 \in \langle (a\ b)\,v_2 \rangle$$

$$\iff rg\big((a\ b)\,v_2\big) = rg\big((a\ b)\,v_2 \,|\, c-(a\ b)X_2\big)$$

	$(a,b)\,v_2$	$rg\big((a\ b)v_2 \,\vert\, c-(a\ b)X_2\big)$
$r_1 \equiv r_2$	0	1
$\parallel$	0	2
$\times$	$\neq 0$	2

(!): $\mathrm{Ker}(ab)+\langle v_2\rangle$: $\forall t \in \mathbb{R}$ l'insieme $\mathrm{Ker}(ab)+tv_2$ è l'insieme delle soluzioni del sistema $(a\ b)X = (ab)(tv_2)$ quindi $X_1 - X_2$ vi appartiene $\iff \exists\, t \in \mathbb{R}$ t.c.

$$(a\ b)(X_1 - X_2) = (a\ b)\,t v_2$$

$$\iff \exists\, t : \ (a\ b)v_2\, t = c - (a\ b)X_2$$

$\cdot)$ $r_1 : ax+by=c$, $\quad r_2 : a'x+b'y=c'$

(con $(a,b)\neq(0,0)$ e $(a',b')\neq(0,0)$.

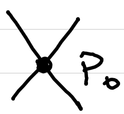
$$r_1 \,//\, r_2 \iff \operatorname{Ker}(a,b) = \operatorname{Ker}(a',b')$$

$$\iff \operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1$$

$$r_1 \cap r_2 \neq \emptyset \iff \begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases} \text{ è risolubile}$$

$$\iff \operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array}\right).$$

<u>Esercizio</u>: Riempite la tabella

	$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$	$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{cc\|c} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array}\right)$
$r_1 \equiv r_2$	1	1
$//$	1	2
	2	2

P_0 è l'unica soluzione di $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$.

Geometria affine dello spazio ($=\mathbb{R}^3$)

Posizione reciproca retta-retta

$\cdot)$ $r_1 = X_1 + \langle v_1 \rangle$, $r_2 = X_2 + \langle v_2 \rangle \subset \mathbb{R}^2$ rette

$(v_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3};\ v_2 \neq 0_{\mathbb{R}^3})$.

$r_1 \parallel r_2 \iff rg\,(v_1 | v_2) = 1$

$r_1 \cap r_2 \neq \emptyset \iff X_1 - X_2 \in \langle v_1 , v_2 \rangle$

$\iff rg\,(v_1\, v_2 \,|\, X_1 - X_2) = rg\,(v_1\, v_2)$

	$rg\,(v_1\ v_2)$	$rg\,(v_1\ v_2 \,\vert\, X_1 - X_2)$
$r_1 \equiv r_2$	1	1
$//$	1	2
$\times\, P_0$	2	2
"sghembe"	2	3

$P_0 :\ (v_1\, v_2)\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = X_1 - X_2 \Rightarrow P_0 = X_1 - t_1 v_1 = X_2 + t_2 v_2$

NB.

<u>Es</u>: Stabilire la posizione reciproca dei seguenti sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$

$$r = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad , \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

<u>Sol.</u>:

$$rg\left(v_1\, v_2 \,|\, X_2 - X_1\right) = rg\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & \cancel{-7} \\ 1 & 4 & -5 \end{array}\right) -5$$

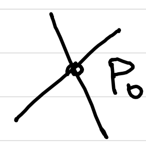
$$= rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & \cancel{-4}\ 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \cancel{0} \end{pmatrix} = 2 \quad (*)$$

Inoltre lo stesso conto ci dice che

$$rg\left(v_1\, v_2\right) = 2 \qquad (**)$$

$(*) + (**)$: si intersecano

$(**)$: non sono parallele



Calcoliamo la soluzione di $(v_1 v_2) X = (X_2 - X_1)$

$$(v_1\ v_2 \,|\, X_2 - X_1) \underset{R}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{R}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad t_1 = -1 \ , \quad t_2 = -1$$

$$\Rightarrow \quad -v_1 - v_2 = X_2 - X_1 \qquad \Rightarrow P_0 = X_2 + v_2 = X_1 - v_1$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

·) $r_1 : AX = b \qquad r_2 = X_2 + \langle v_2 \rangle$

$\left(A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 3}(\mathbb{R}) \quad rg\, A = 2 \right.$,

$\left. v_2 \neq 0_{\mathbb{R}^3} \right)$

$r_1 // r_2 \iff v_2 \in \ker A \iff Av_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$

$r_1 \cap r_2 \iff X_1 - X_2 \in \ker A + \langle v_2 \rangle$

$\iff A(X_1 - X_2) \in \cancel{\langle v_2 \rangle}\ \langle Av_2 \rangle$

$\iff b - AX_2 \in \cancel{\langle v_2 \rangle}\ \langle Av_2 \rangle$

$\iff (Av_2)t = b - AX_2$ è risolubile

	$rg(Av_2)$	$rg(Av_2 \mid b - AX_2)$
$r_1 \equiv r_2$	0	0
$//$	0	1
P_0	1	1
"sghembe"	1	2

Sia t la soluzione di $tAv_2 = b - AX_2$

Allora $A(X_2 + tv_2) = b \Rightarrow P_0 = X_2 + tv_2$

Es:

$$r: \begin{cases} 2x+3y-z=5 \\ x+2y+z=6 \end{cases} \qquad s = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

posizione reciproca?

Sol.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$,

$X_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

$$A v_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ r_1 ed r_2 non sono parallele.

$r_1 \cap r_2 = ?$ $\qquad X_2 + t v_2 \overset{?}{\in} r$.

$\Leftrightarrow \quad A(X_2 + t v_2) = b$

$\Leftrightarrow \quad t(A v_2) = b - A X_2$

$r_1 \cap r_2 \neq \phi \Leftrightarrow$ il sistema $(A v_2) t = b - A X_2$ è risolubile $\Leftrightarrow rg(A v_2) = rg(A v_2 | b - A X_2)$

$$rg(A v_2 | b - A X_2) = rg\left(\begin{matrix}1\\2\end{matrix} \middle| \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right)$$

$$= rg\left(\begin{matrix}1\\2\end{matrix} \middle| \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} \right) = rg\left(\begin{matrix}1\\2\end{matrix} \middle| \begin{matrix}1\\2\end{matrix} \right) = 1$$

$= rg\, A v_2$. $\Rightarrow r_1 \cap r_2 \neq \phi$. Risolviamolo:

$$\left(\begin{matrix}1\\2\end{matrix} \middle| \begin{matrix}1\\2\end{matrix} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{matrix}1\\0\end{matrix} \middle| \begin{matrix}1\\0\end{matrix} \right) \qquad t = 1 \qquad P_0 = X_2 + v_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

Posizione reciproca retta-piano

$\cdot)$ $r = X_1 + \langle v_1 \rangle \qquad \pi = X_2 + \langle v_2, v_3 \rangle.$

$\left(v_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3},\ rg\,(v_2\ v_3) = 2 \right).$

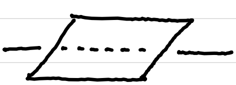
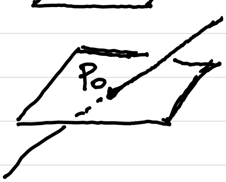
$r \parallel \pi \iff \langle v_1 \rangle \subseteq \langle v_2, v_3 \rangle$

$\iff v_1 \in \langle v_2, v_3 \rangle$

$\iff rg\,(v_2\ v_3 \mid v_1) = 2 = rg\,(v_2\ v_3)$

$r \cap \pi \neq \emptyset \iff X_1 - X_2 \in \langle v_2, v_3, v_1 \rangle$

$\iff rg\,(v_2\ v_3\ v_1 \mid X_1 - X_2) = rg\,(v_2\ v_3\ v_1)$

	$rg\,(v_2\ v_3 \mid v_1)$	$rg\,(v_2\ v_3\ v_1 \mid X_1 - X_2)$
$r \subset \pi$	2	2
	2	3
	3	3

$P_0 = ?$ Sia $\begin{pmatrix} t_2 \\ t_3 \\ t_1 \end{pmatrix}$ l'unica soluzione di

$(v_2\ v_3\ v_1) \begin{pmatrix} t_2 \\ t_3 \\ t_1 \end{pmatrix} = X_1 - X_2$ Allora $P_0 = X_1 - t_1 v_1$

$= X_2 + t_2 v_2 + t_3 v_3.$