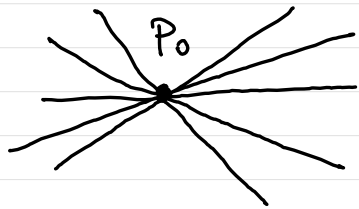
Fascio di rette per un punto

Sia $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Come sono fatte le rette che lo contengono?



Una tale retta ha eq. par. della forma

$$P_0 + \langle v \rangle \qquad v \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sia $r: ax + by = c \quad ((a,b) \neq (0,0))$.

una retta. Allora r contiene P_0 se e solo se

$$c = a x_0 + b y_0.$$

r contiene P_0 se e solo se

$$ax + by = a x_0 + b y_0$$

se e solo se

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

$$\mathcal{F}_{P_0} = \left\{ a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \mid (a,b) \neq (0,0) \right\}$$

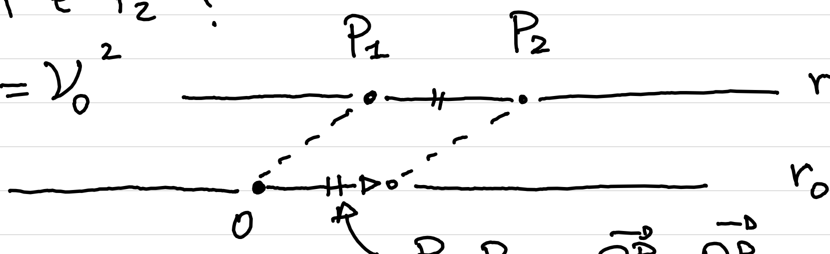
è il fascio di rette per P_0 in $\mathbb{R}^2$.

$$\mathcal{F}_{P_0} = \{ a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0 \mid (a,b) \neq (0,0) \}$$

<u>Retta per due punti</u>

$P_1, P_2 \in V$, $P_1 \neq P_2$. Retta che contiene P_1 e P_2?

$V = \mathcal{V}_0^2$



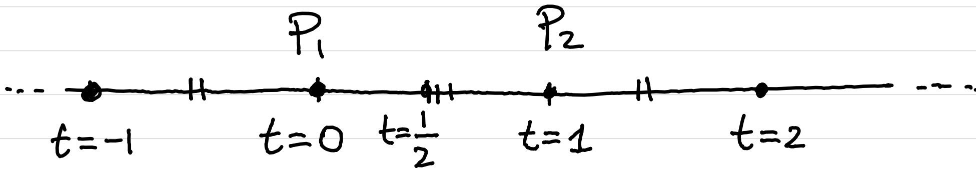
$P_2 - P_1 := \vec{OP_2} - \vec{OP_1}$

$$r = P_1 + \langle P_2 - P_1 \rangle$$

In qualunque V:

$$r = P_1 + \langle P_2 - P_1 \rangle$$
$$= \{ P_1 + t(P_2 - P_1) \mid t \in \mathbb{R} \}$$
$$= \{ (1-t)P_1 + tP_2 \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$r = P_1 + \langle P_2 - P_1 \rangle$$
$$= \{ P_1 + t(P_2 - P_1) \mid t \in \mathbb{R} \}$$
$$= \{ \underbrace{(1-t)P_1 + tP_2}_{Q_t} \mid t \in \mathbb{R} \} \ni P_1 = Q_0$$
$$P_2 = Q_1$$

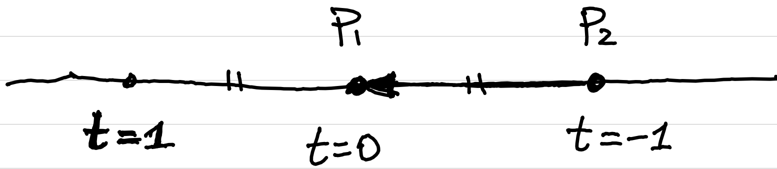


$$r = P_1 + \langle P_1 - P_2 \rangle$$

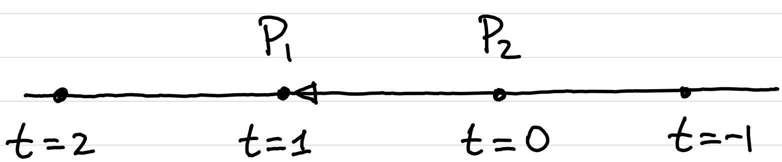
$$r = P_1 + \langle P_1 - P_2 \rangle$$ è "strana"

$$= \{ P_1 + t(P_1 - P_2) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ \underbrace{(1+t)P_1 - t P_2}_{\overset{\parallel}{Q_t}} \mid t \in \mathbb{R} \}$$



$$r = P_2 + \langle P_1 - P_2 \rangle$$



Eq. cartesiana in $\mathbb{R}^2$:

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \neq P_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Cerchiamo eq. cart. di "$r_{P_1P_2} = P_1 \vee P_2$" della retta per P_1 e P_2:

Consideriamo il fascio di rette per P_1

$$r_{(a,b)} : \quad a(x-x_1)+b(y-y_1)=0 \qquad (\star)$$

Cerchiamo $(a,b) \neq (0,0)$ t.c. $P_2 \in r_{(a,b)}$:

$$a\,\underbrace{(x_2-x_1)}+b\,\underbrace{(y_2-y_1)}=0$$

Ad esempio, scegliamo

$$(a,b) = \left(-(y_2-y_1),\, (x_2-x_1)\right)$$

Sostituendo in $(\star)$:

$$\boxed{-(y_2-y_1)(x-x_1)+(x_2-x_1)(y-y_1)=0}$$

Eq. cartesiana della retta per P_1 e P_2.

$$\boxed{(x_2-x_1)(y-y_1)=(y_2-y_1)(x-x_1).}$$

Es : Eq. della retta per $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$(-1)(y-3) = (-7)(x-2)$$

$$\boxed{7x - y = 11}$$

Fascio improprio di rette

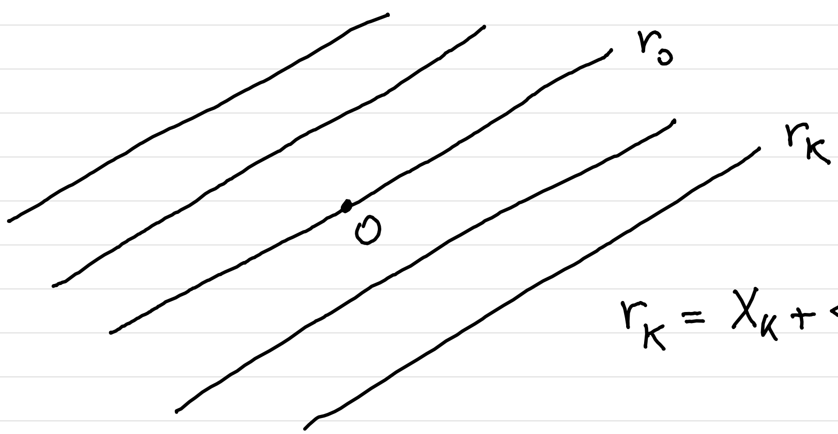
Data una retta $r: a_0 x + b_0 y = c_0$ in $\mathbb{R}^2$ come sono fatte le rette parallele ad r?

La retta di giacitura di r è

$$r_0 : a_0 x + b_0 y = 0$$

Le rette parallele ad r sono quindi della forma

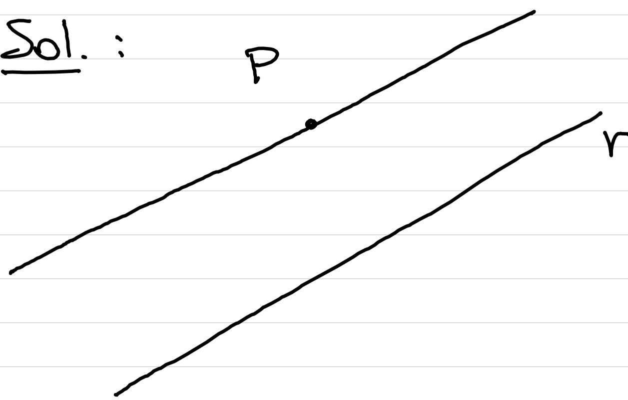
$$r_k : a_0 x + b_0 y = k$$



$$r_k = X_k + \left\langle \begin{pmatrix} -b_0 \\ a_0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Es: Determinare la retta per $P=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ e parallela a $r: 2x+3y=-2$.

Sol.:



$r_k: \quad 2x+3y=k$

Imponiamo il passaggio per P:

$$2+3=k$$

$$\Rightarrow \quad k=5$$

La retta cercata è $r_5: 2x+3y=5$.

e ha eq. parametrica

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\left\langle\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}\right\rangle.$$

<u>Oss</u>: Siano

$r_1 : ax+by=c$ e $r_2 : a'x+b'y=c'$

due rette di $\mathbb{R}^2$ $\left((a,b)\neq(0,0) \text{ e } (a',b')\neq(0,0) \right).$

Consideriamo le rette della forma

$$\boxed{r_{\alpha,\beta} : \alpha(ax+by-c)+\beta(a'x+b'y-c')=0}$$

al variare di $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$.

$r_{1,0}=r_1$, $r_{0,1}=r_2$

Se $r_1\cap r_2=\{P_0\}$ Allora

$$\mathcal{F}_{P_0}=\{r_{\alpha,\beta} \mid (\alpha,\beta)\neq(0,0)\}$$

Se $r_1 \parallel r_2$, allora $\{r_{\alpha,\beta}\}=\{$ fascio improprio di rette parallele a $r_1\}$

Es: $r_1: 2x+3y=2$, $r_2: 3x-4y=1$.

Sia $P_0 = r_1 \cap r_2$. Trovare un' eq. cartesiana della retta per P_0 e $P_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Sol.:

$$r_{\alpha,\beta}: \alpha(2x+3y-2)+\beta(3x-4y-1)=0$$

$$r_{\alpha,\beta}: (2\alpha+3\beta)x+(3\alpha-4\beta)y = 2\alpha+\beta$$

Imponiamo il passaggio per P_1:

$$(2\alpha+3\beta)5+(3\alpha-4\beta)(-3) = 2\alpha+\beta$$

ovvero

$$(10-9-2)\alpha+(15+12-1)\beta=0$$

ovvero

$$-\alpha+26\beta=0$$

ovvero

$$\alpha = 26\beta$$

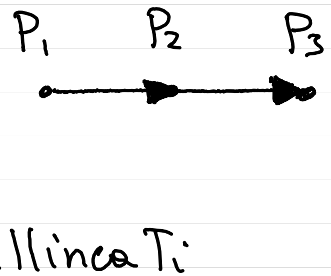
La retta cercata è

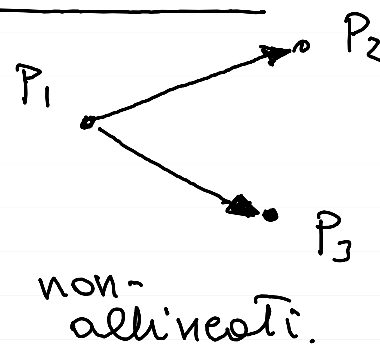
$$r_{26,1}: 55x+74y=53.$$

Piano per 3 punti

Siano P_1, P_2, P_3 tre punti.
Essi si dicono <u>allineati</u> se $\exists$ una retta che li contiene tutti e tre.

Condizione di allineamento





P_1, P_2 e P_3 sono allineati se $\exists\, t$ t.c.

$$P_3 = P_1 + t(P_2 - P_1) \iff \exists\, t \in \mathbb{R} \text{ t.c.}$$

$$P_3 - P_1 = t\,(P_2 - P_1) \iff$$

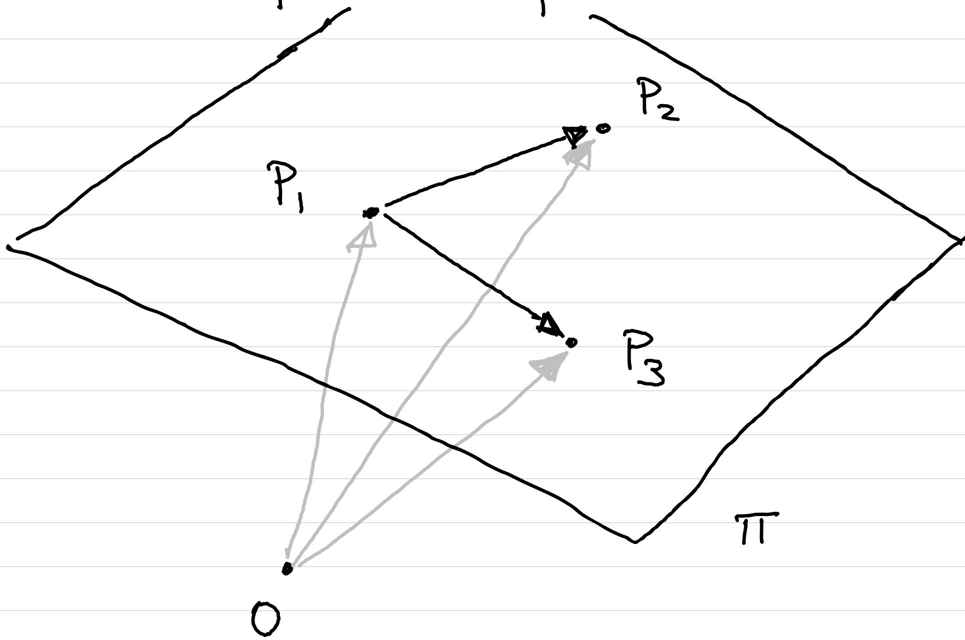
$P_3 - P_1$ e $P_2 - P_1$ sono lin. Dip.

$$\iff \quad rg\,(P_3 - P_1 \mid P_2 - P_1) \leq 1$$

$$\left(\overrightarrow{P_1P_3} = P_3 - P_1\right)$$

Siano $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^3$ non allineati.

Com'è fatto il piano che li contiene?



$$\pi = P_1 + \langle P_2 - \underline{P_1}, P_3 - \underline{P_1} \rangle$$

Stella di piani per un punto

Sia $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Come sono fatti i piani che contengono P_0? Un piano di $\mathbb{R}^3$:

$$\pi : \; ax + by + cz = d$$

$P_0 \in \pi \iff d = a x_0 + b y_0 + c z_0$

Sostituendo,

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

Siano $P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ $P_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

non allineati. Sia $\pi \ni P_1, P_2, P_3$.

$$\pi : \; a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

Imponiamo il passaggio per P_2 e P_3:

$$\begin{cases} a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0 \\ a(x_3 - x_1) + b(y_3 - y_1) + c(z_3 - z_1) = 0 \end{cases}$$

Risolvendolo troviamo (a, b, c).

Es: Piano per $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sol.: Stella di piani per P_1:

$$\pi: \quad a(x-1) + b(y-1) + c(z-1) = 0$$

Imponiamo il passaggio per P_2 e P_3:

$$\begin{cases} a(1-1) + b(2-1) + c(1-1) = 0 \\ a(2-1) + b(2-1) + c(1-1) = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} b = 0 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

le soluzioni sono $(a, b, c) = (0, 0, c)$

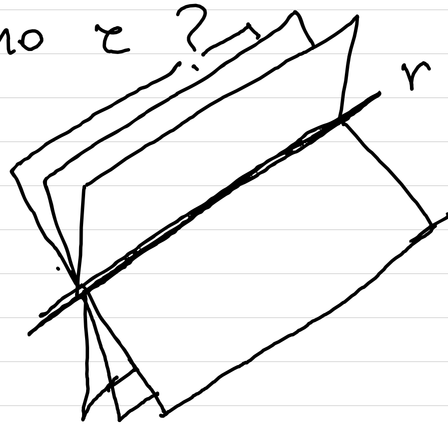
$$\pi: \quad z - 1 = 0 \qquad \pi: z = 1.$$

Fascio di piani per una retta di $\mathbb{R}^3$

$$r: \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$$

con $rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=2$ una retta di $\mathbb{R}^3$.

Come sono fatti i piani che contengono r?



Fascio di piani per r.

$$\boxed{\pi_{\alpha,\beta}: \alpha\,(ax+by+cz-d)+\beta\,(a'x+b'y+c'z-d')=0}$$

$(\alpha,\beta)\neq(0,0)$.

Es: $r: \begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+3y+2z=2 \end{cases}$

$$\pi_{\alpha,\beta}: \alpha\,(2x+y-z-1)+\beta\,(x+3y+2z-2)=0$$

$$\pi_{\alpha,\beta}: (2\alpha+\beta)x+(\alpha+3\beta)y+(-\alpha+2\beta)z=\alpha+2\beta.$$

Es: $r: \begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ 3x-y+2z=2 \end{cases}$ $\quad P=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Trovare il piano contenente r e P.

Sol.: Fascio di piani per r:

$$\pi_{\alpha,\beta}: \alpha(2x+3y+z-1)+\beta(3x-y+2z-2)=0$$

$$\pi_{\alpha,\beta}: (2\alpha+3\beta)x+(3\alpha-\beta)y+(\alpha+2\beta)z=\alpha+2\beta$$

Imponiamo il passaggio per P:

$$(2\alpha+3\beta)1+(3\alpha-\beta)1+(\alpha+2\beta)1=\alpha+2\beta$$

ovvero

$$5\alpha+2\beta=0$$

Una soluzione è $\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$.

Il piano cercato è

$$\pi_{-2,5}: (-4+15)x+(-6-5)y+(-2+10)z=8$$

ovvero

$$\pi: 11x-11y+8z=8.$$