Proprietà del prodotto vettoriale

•) $v \wedge w = - w \wedge v$

•) La funzione $\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$v, w \longmapsto v \wedge w$$

è bilineare.

•) $v \wedge w \cdot v = Av = L(v) = \det(v, w, v) = 0$

$v \wedge w \cdot w = Aw = L(w) = \det(v, w, w) = 0$

Quindi $v \wedge w \perp v$, $v \wedge w \perp w$.

Il prodotto misto di 3 vettori $v, w, u \in \mathbb{R}^3$ è

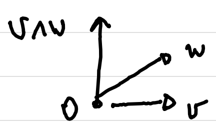
$$v \wedge w \cdot u = Au = L(u) = \det(v, w, u).$$

•) $v \wedge w \neq 0_{\mathbb{R}^3} \iff rg(v, w) = 2$

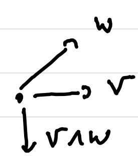
$\iff v$ e w sono lin. ind.

Infatti, $L = 0 \iff \det(v, w, X) = 0 \;\; \forall X \in \mathbb{R}^3$

Se $rg(v, w) = 2$, $(v, w, v \wedge w)$ è una base di $\mathbb{R}^3$. Se



(Equiversa)



(controversa)

Se $\det(v, w, v \wedge w) > 0$

se $\det(v, w, v \wedge w) < 0$.

Norma del prodotto vettoriale

$\|v \wedge w\| = \text{Area } \mathcal{P}(v, w)$.

dim:

$\text{vol}(v, w, v \wedge w) = |\det(v, w, v \wedge w)|$

$\text{vol}(v, w, v \wedge w) = \|v \wedge w\| \text{ Area}(\mathcal{P}(v, w))$

$$\Rightarrow \quad \text{Area}(\mathcal{P}(v, w)) = \frac{|\det(v, w, v \wedge w)|}{\|v \wedge w\|} = \|v \wedge w\|.$$

$$\det(v, w, v \wedge w) = v \wedge w \cdot v \wedge w = \|v \wedge w\|^2$$

$\blacksquare$

Quindi $v \wedge w$ è un vettore:

·) Direzione: ortogonale al piano $\langle v, w \rangle$

·) Verso: con la regola della mano destra

·) norma: Area $\mathcal{P}(v, w)$.

Es: Calcolare l'area del Triangolo

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sol.:

$$\text{Area } T = \frac{1}{2} \text{Area } \mathcal{P}(P_2 - P_1, P_3 - P_1)$$

$$= \frac{1}{2} \| (P_2 - P_1) \wedge (P_3 - P_1) \|$$

$$= \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|$$

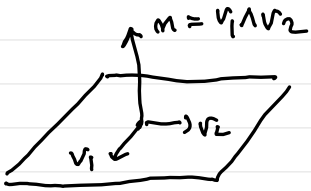
$$= \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 25 + 64}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{90} = \frac{3}{2} \sqrt{10}.$$

□

OSS: $\pi = X_0 + \langle v_1, v_2 \rangle$. Allora

$$\pi : n \cdot X = n \cdot X_0 \quad \text{e} \quad n = v_1 \wedge v_2$$



Es: $\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = n$$

$$n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 + 2 + 5 = 10$$

$$\pi : 3x + y - 5z = 10$$

Distanze retta-retta

Siano $r_1 = X_1 + \langle v_1 \rangle$ e $r_2 = X_2 + \langle v_2 \rangle$ due rette di $\mathbb{R}^3$. Calcoliamo $\mathrm{dist}(r_1, r_2)$

$$\mathrm{dist}(r_1, r_2) = \min_{s,t \in \mathbb{R}} \mathrm{dist}(X_1 + t v_1, X_2 + s v_2)$$

$$= \min_{s,t \in \mathbb{R}} \mathrm{dist}(X_1 - X_2, s v_2 - t v_1)$$

$$= \mathrm{dist}(X_1 - X_2, \langle v_1, v_2 \rangle)$$

Se $\mathrm{rg}(v_1, v_2) = 2$ allora

$$\mathrm{dist}(r_1, r_2) = \frac{|(X_1 - X_2) \cdot v_1 \wedge v_2|}{\|v_1 \wedge v_2\|} =$$

$$= \frac{|\det(v_1, v_2, X_1 - X_2)|}{\|v_1 \wedge v_2\|}$$

Se $\mathrm{rg}(v_1, v_2) = 1$ allora

$$\mathrm{dist}(r_1, r_2) = \mathrm{dist}(X_1 - X_2, \langle v_1 \rangle)$$

$$= \| X_1 - X_2 - \mathrm{pr}_{v_1}(X_1 - X_2) \|$$

$$= \left\| X_1 - X_2 - \frac{(X_1 - X_2) \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 \right\|$$

Prodotto hermitiano standard su $\mathbb{C}^n$

Dato $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ definiamo $\overline{Z} = \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \vdots \\ \overline{z_n} \end{pmatrix}$

Es: $\overline{\begin{pmatrix} 1+i \\ 2+3i \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2-3i \end{pmatrix}$

Il prodotto hermitiano standard su $\mathbb{C}^n$ è

$$(-,-) : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(Z,W) = Z \cdot \overline{W} = Z^t \overline{W} = z_1 \overline{w_1} + z_2 \overline{w_2} + \dots + z_n \overline{w_n}$$

Es:

$$\begin{pmatrix} 1+i \\ 2+3i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1-i \end{pmatrix} = (1+i, 2+3i) \begin{pmatrix} -i \\ 1+i \end{pmatrix}$$

$$= -1 - i^2 + (\cancel{2}+3i)(1+i)$$

$$= -\cancel{1} + \cancel{1} + 2 + 2i + 3i - \cancel{3}$$

$$= -1 + 5i .$$

·) $\lambda Z \cdot W = \lambda (Z \cdot W)$, $Z \cdot \lambda W = \overline{\lambda}\, Z \cdot W$

·) $Z \cdot Z \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. $Z \cdot Z = z_1 \overline{z_1} + \dots + z_n \overline{z_n} = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2$

·) $Z \cdot Z = 0_{\mathbb{C}} \iff Z = 0_{\mathbb{C}^n}$.

·) $Z \cdot W = \overline{W \cdot Z}$

Matrici ortogonali

Sia $\mathcal{B} = (E_1, \dots, E_n)$ una base ortonormale di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$. Sia $B = (E_1, \dots, E_n) \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$. Allora

$$(B^t B)_i^j = E_i \cdot E_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad B^t B = \mathbb{1}_n.$$

$$\Rightarrow \quad B^{-1} = B^t.$$

Def: Una matrice B si dice ortogonale se

$$B^t B = \mathbb{1}_n.$$

OSS: $B = (E_1 | \dots | E_n) \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$ è ortogonale se e solo se $(E_1, \dots, E_n)$ è una base ortonormale di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$

ES:
$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

OSS: B ortogonale $\Rightarrow B^{-1} = B^t$.

Il Teorema spettrale

Def: Un endo lineare $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si dice <u>ortogonalmente diagonalizzabile</u> se esiste una base ortogonale di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ composta di autovettori per L.

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$P_A(x) = x^2 - 2x - 3$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

$$V_3(A) = \ker \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \ker (1 \ -1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_{-1}(A) = \ker \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \ker (1 \ 1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ è una base ortogonale di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ composta di autovettori per A.

$\Rightarrow$ A è ortogonalmente diagonalizzabile.

OSS: A è ortogonalmente diagonalizzabile

$$\Updownarrow$$

1) A è diagonalizzabile
2) $V_\lambda(A) \perp V_\mu(A) \quad \forall \lambda \neq \mu,\ \lambda, \mu \in Sp(A) \subset \mathbb{R}$.

__Teorema spettrale reale__

A è ortogonalmente diagonalizzabile

$$\Updownarrow$$

$$A = A^t \quad (A \text{ è simmetrica})$$

__dim__: $\Downarrow$) Se A è ortogonalmente diagonalizzabile esiste una base ortonormale di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ composta di autovettori per A. $\mathcal{B} = (E_1, \dots, E_n)$.

Sia $B = (E_1 | \dots | E_n)$ e $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ con

$$AE_i = \lambda_i E_i.$$

Allora $B^{-1}AB = D$. Poiché B è ortogonale, $B^{-1} = B^t$

$$B^t A B = D \Rightarrow A = BDB^t$$

$$\Rightarrow A^t = (BDB^t)^t = BDB^t = A.$$

II). Sia $A = A^t$ simmetrica

<u>Lemma 1</u>: $Sp(A) \subset \mathbb{R}$.

<u>dim</u>: Sia $\lambda \in Sp(A)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Sia $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ t.c. $AX = \lambda X$. Allora

$$X \cdot \overline{AX} = X \cdot \overline{\lambda X} = \bar{\lambda}\, X \cdot \bar{X}$$

$$X \cdot \overline{AX} = X \cdot A\bar{X} = A^t X \cdot \bar{X} = AX \cdot \bar{X} = \lambda\, X \cdot \bar{X}$$

$$\Rightarrow (\bar{\lambda} - \lambda)\, X \cdot \bar{X} = 0 \underset{X \cdot \bar{X} \neq 0}{\Rightarrow} \bar{\lambda} = \lambda$$

$$\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

$\blacksquare$

<u>Lemma 2</u>: Siano $\lambda \neq \mu$, $\lambda, \mu \in Sp(A)$. Allora $V_\lambda(A) \perp V_\mu(A)$.

<u>dim</u>: Sia $X \in V_\lambda(A)$ e $Y \in V_\mu(A)$. Allora

$$X \cdot AY = X \cdot \mu Y = \mu\, X \cdot Y$$

$$X \cdot AY = A^t X \cdot Y = AX \cdot Y = \lambda\, X \cdot Y$$

$$\Rightarrow (\lambda - \mu)\, X \cdot Y = 0 \underset{\lambda \neq \mu}{\Rightarrow} X \cdot Y = 0.$$

$\blacksquare$

Lemma 3: $\forall \lambda \in Sp(A) \quad ma_A(\lambda) = mg_A(\lambda)$.

dim: Sia $W = V_\lambda(A)^\perp$.

$$\mathbb{R}^n = V_\lambda(A) \oplus W$$

Osserviamo che W è A-invariante. Infatti,

$\forall w \in W, \quad \forall v \in V_\lambda(A)$

$$v \cdot Aw = A^t v \cdot w = Av \cdot w = \lambda v \cdot w$$
$$= \lambda (v \cdot w) = 0$$
$$\Rightarrow \quad Aw \in V_\lambda(A)^\perp.$$

Sia $(v_1, \dots, v_k)$ una base di $V_\lambda(A)$ e

$(v_{k+1}, \dots, v_n)$ una base di W.

Sia $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ e $B = (v_1 | \dots | v_n)$.

La matrice che rappresenta S_A nella base $\mathcal{B}$ è

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{S_A} & \mathbb{R}^n \\ S_{B^{-1}} = F_{\mathcal{B}} \downarrow & & \downarrow F_{\mathcal{B}} = S_{B^{-1}} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{S_M} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

$$S_M = B^{-1} A B = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathbb{1}_k & 0 \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

C è $(n-k) \times (n-k)$. $\quad P_A(x) = P_M(x) = (x-\lambda)^k P_C(x)$.

$p_c(\lambda) \neq 0$ quindi

$$ma_A(\lambda) = k = mg_A(\lambda). \qquad \blacksquare$$

Es: Stabilire se la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

è ortogonalmente diagonalizzabile e nel caso lo sia trovare una matrice ortogonale B ed una matrice diagonale D t.c. $B^t A B = D$.

dim: Dato che $A = A^t$, A è ort. diag. per il teorema spettrale.

$$P_A(x) = x^2 - 4x - 5$$

$$P_A(x) = 0 \iff x = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = 2 \pm 3 = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$$

Sia λ: $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$.

$$V_\lambda(A) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} \lambda-2 & -3 \\ -3 & \lambda-2 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2-\lambda}{3} \\ \lambda-2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2-\lambda}{3} \\ 0 & -3 - \frac{(\lambda-2)(2-\lambda)}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 3 & 2-\lambda \\ 0 & -9 + (\lambda-2)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 3 & 2-\lambda \\ 0 & \underbrace{-9 + \lambda^2 - 4\lambda + 4}_{0} \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda-2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \quad V_5(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_{-1}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es: Sia $\mathcal{B} = \left(v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$.

Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare t.c.

$$L(v_1) = 25 v_1 - 10 v_2$$
$$L(v_2) = 62 v_1 - 25 v_2$$

Stabilire se L è ortogonalmente diagonalizzabile, e nel caso lo sia trovare una base ortogonale di autovettori per L.

Sol.: Due possibilità:

1) Troviamo A t.c. $L = S_A$. Per il Teorema spettrale, L è ort. diag. $\Leftrightarrow A = A^t$.

2) Lavoriamo nella base $\mathcal{B}$.

①:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{L} & \mathbb{R}^2 \\ {\scriptstyle S_{B^{-1}} = F_{\mathcal{B}}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle F_{\mathcal{B}} = S_{B^{-1}}} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{S_C} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 25 & 62 \\ -10 & -25 \end{pmatrix}$$

$$A = BCB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 & 62 \\ -10 & -25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$A = A^t \Rightarrow L$ è ort. diag.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad p_A(x) = x^2 - 5 = (x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$$

Sia $\lambda : \lambda^2 = 5$.

$$V_\lambda(A) = \ker \begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -2 & \lambda+1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\lambda+1}{2} \\ \lambda-1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\lambda+1}{2} \\ 0 & -2 + \frac{(\lambda-1)(\lambda+1)}{2} = -2 + \frac{\lambda^2-1}{2} = -2+2=0 \end{pmatrix}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\lambda+1}{2} \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -2 & \lambda+1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda+1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_{\sqrt{5}}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{5}+1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad V_{-\sqrt{5}}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} -\sqrt{5}+1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{5}+1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{5}-1 \\ -2 \end{pmatrix} = 5-1-4=0$$

$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} \sqrt{5}+1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{5}-1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ è la base cercata.

② La matrice che rappresenta L nella base $\mathcal{B}$ è $C = \begin{pmatrix} 25 & 62 \\ -10 & -25 \end{pmatrix}$

$$p_C(x) = x^2 - 5 = (x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5}).$$

Sia $\lambda : \lambda^2 = 5$.

$$V_\lambda(C) = \ker \begin{pmatrix} \lambda-25 & -62 \\ 10 & \lambda+25 \end{pmatrix}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda+25}{10} \\ \lambda-25 & -62 \end{pmatrix}$$

$$-62 - \frac{\lambda^2-25^2}{10}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda+25}{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-62 - \frac{5-625}{10}$$

$$-62+62=0$$

$$= \ker (10 \quad \lambda+25)$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} \lambda+25 \\ -10 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Es: Sia

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad W: \ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0$$

Stabilire se pr_U^W è ortogonalmente diagonalizzabile e nel caso lo sia trovare una base ortogonale di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ composta di suoi autovettori.

Sol.: pr_U^W ha due autovalori 0 e 1, l'autospazio di autovalore 0 è W e quello di autovalore 1 è U. Quindi pr_U^W è ort. diag. $\Leftrightarrow U = W^\perp$.

Osserviamo che W è un iperpiano e che

$$W^\perp = \langle n \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = U.$$ Per cui pr_U^W è ort. diag.

$$\mathcal{B}_W = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

ortogonalizziamola:

$$F_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-4}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Poniamo

$$F_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3' = v_3 - \frac{v_3 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 - \frac{v_3 \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(-6)}{45} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$135 - 108 - 12$
$135 - 120$

$$\begin{pmatrix} -3 + \frac{12}{5} + \frac{12}{45} = -\frac{15}{45} \\ -\frac{6}{5} + \frac{24}{45} = -\frac{30}{45} \\ \frac{30}{45} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F_3 = \begin{pmatrix} -15 \\ -30 \\ 30 \\ 45 \end{pmatrix} \qquad F_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad F_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La base

$$\mathcal{C} = (F_1, F_2, F_3, F_4) \text{ con } F_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

è una base ortogonale di $(\mathbb{R}^4, \cdot)$ composta di autovettori per pr_U^W.

Teorema spettrale complesso

Sia $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$. Allora A è ortogonalmente diagonalizzabile in $(\mathbb{C}^n, (-,-)_{\mathbb{C}})$ se e solo se

$$A = \overline{A^t} = \overline{A}^t .$$

Es:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 2i & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A}^t = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 2i & 2 \end{pmatrix} = A .$$

OSS: In $(\mathbb{C}^n, (-,-)_{\mathbb{C}})$

$$(AX, Y)_{\mathbb{C}} = (X, \overline{A}^t Y)_{\mathbb{C}}$$

In $(\mathbb{R}^n, \cdot)$

$$AX \cdot Y = X \cdot A^t Y.$$

Se $A = \overline{A}^t$ allora $(AX, Y)_{\mathbb{C}} = (X, AY)$

Se $A = A^t$ allora $AX \cdot Y = X \cdot AY.$

Isometrie di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$

Una isometria di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ è una funzione

$$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

t.c. $\operatorname{dist}(F(X), F(Y)) = \operatorname{dist}(X, Y) \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$.

Fatti (v. note):

1) F è lineare se e solo se $F(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n}$.
2) Posto $L(X) = F(X) - F(0_{\mathbb{R}^n})$ la funzione L è un'isometria lineare. Quindi, un'isometria è la composizione di una traslazione e di un'isometria lineare.
3) Sia $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una f.ne lineare.
   L è un'isometria lineare $\Leftrightarrow \|L(X)\| = \|X\| \quad \forall X \in \mathbb{R}^n$.
   $\Leftrightarrow L(X) \cdot L(Y) = X \cdot Y \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$.

Sia $L = S_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una f.ne lineare.

L è un'isometria $\Leftrightarrow A^t A = \mathbb{1}_n$.

$\Leftrightarrow A$ è una matrice ortogonale.

Isometrie di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$

Teorema: Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un'isometria. Allora

$\exists\ \vartheta \in [0, 2\pi)$ t.c.

$$A = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$ Matrice di rotazione

oppure

$$A = Q_m = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}$$ Matrice di riflessione

dove $m = \operatorname{Tg}\vartheta$ ("$m = \infty$" se $\vartheta = \frac{\pi}{2}$)

__dim__: A è un'isometria sse A è ortogonale

sse $\exists\ \vartheta, \mu$ t.c. $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\mu \\ \sin\mu \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = 0$.

$$\cos\vartheta\cos\mu + \sin\vartheta\sin\mu = 0$$

$$\cos\vartheta\cos(-\mu) - \sin\vartheta\sin(-\mu) = 0$$

$$\cos(\vartheta - \mu) = 0$$

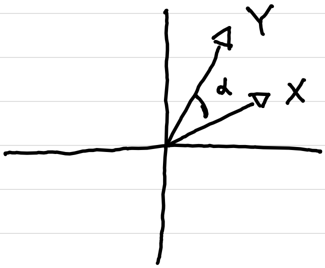
$$\vartheta - \mu = K\frac{\pi}{2}$$

1) $\mu = \vartheta + \frac{\pi}{2}$ o 2) $\mu = \vartheta - \frac{\pi}{2}$.

1) $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta + \frac{\pi}{2} \\ \sin\vartheta + \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$

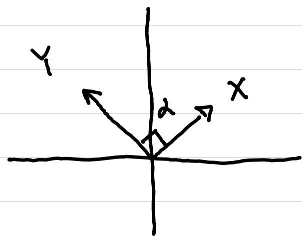
2) $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta - \pi/2 \\ \sin\vartheta - \pi/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta \\ -\cos\vartheta \end{pmatrix}$

Pendenza di una retta



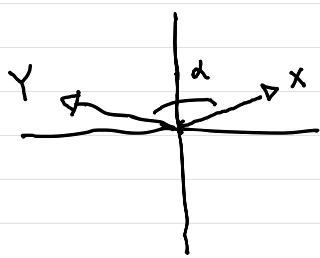
$X \cdot Y > 0$ $\quad$ α acuto

$(\cos\alpha > 0)$



$X \cdot Y = 0$ $\quad$ $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$(\cos\alpha = 0)$



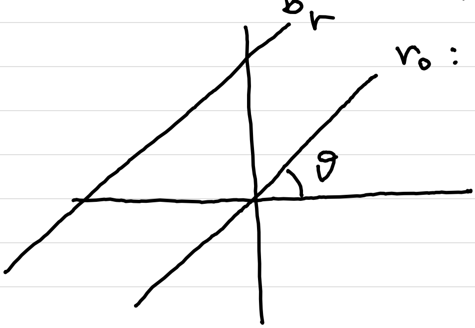
$X \cdot Y < 0$ $\quad$ α ottuso

$(\cos\alpha < 0)$

Sia $r: ax + by = c$ una retta.

Se $b \neq 0$ possiamo scrivere $r: y = mx + q$

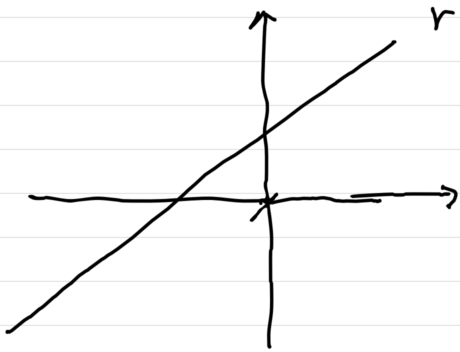
dove $m = -\frac{a}{b}$ e $q = \frac{c}{b}$



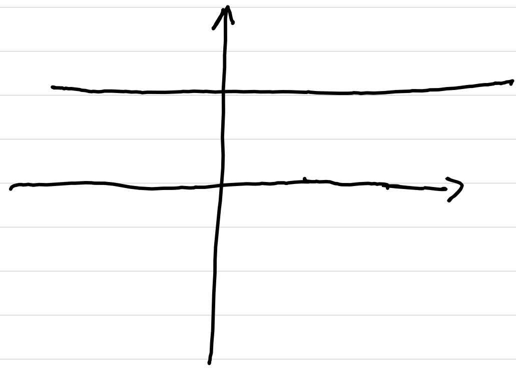
$r_0 : y = mx$ $\quad$ $r_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \right\rangle$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = Tg\theta \end{pmatrix} \right\rangle$

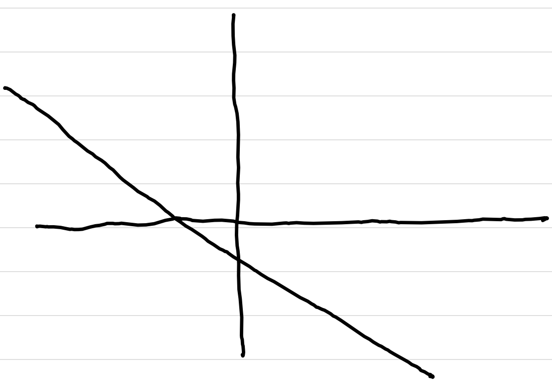
$m = Tg\,\theta$ = pendenza di r.



$m > 0$



$m = 0$



$m < 0$

Riflessione ortogonale attraverso una retta

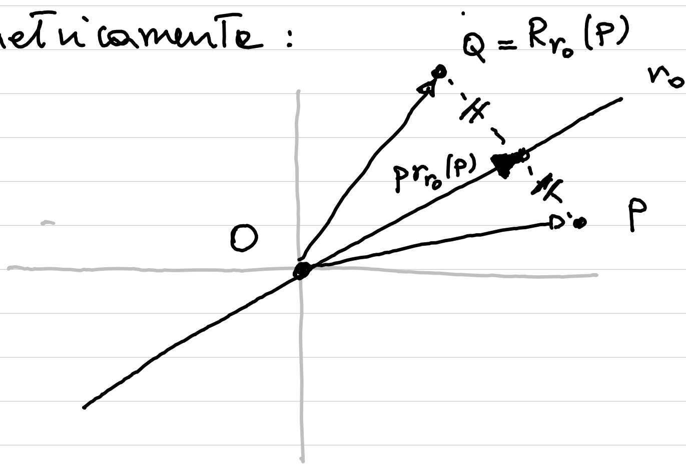
Sia $r_0 : ax+by=0$ una retta per l'origine.

La <u>riflessione ortogonale attraverso r_0</u> è

è la funzione

$$\begin{aligned} R_{r_0}: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ P &\longmapsto 2\, pr_{r_0}(P) - P \end{aligned}$$

Geometricamente:



$$P - Q = 2\left(P - pr_{r_0}(P)\right)$$

<u>Esercizio</u> R_{r_0} è lineare.

Sia Q_{r_0} la matrice associata a R_{r_0}.

Com'è fatta Q_{r_0}?

Teorema: $r_0 = \left\langle \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \right\rangle$

Allora

$$Q_{r_0} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

Se $r_0 : x = 0$ (ovvero $\theta = \pi/2$)

$$Q_{r_0} = Q_\infty = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq \theta < \pi$, $r_0 : y = mx$

$$Q_{r_0} = Q_m = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$$

dim:

$$R_{r_0}(e_1) = 2\, pr_{\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}}(e_1) - e_1$$

$$= 2\cos\theta \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cos^2\theta - 1 \\ 2\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ 2\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix}$$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2\theta) \\ \sin(2\theta) \end{pmatrix} = \text{1}^a \text{ colonna di } Q_{r_0}$$

$$R_{r_0}(e_2) = 2\, pr_{\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}}(e_2) - e_2$$

$$= \begin{pmatrix} 2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin^2\theta - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2\theta) \\ -\cos(2\theta) \end{pmatrix} = \text{2}^a \text{ colonna di } Q_{r_0}$$

Se $r_0 : x=0$ allora $r_0 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} \cos \pi/2 \\ \sin \pi/2 \end{pmatrix} \rangle$

$$Q_{r_0} = \begin{pmatrix} \cos \pi & \sin \pi \\ \sin \pi & -\cos \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Q_\infty .$$

Se $r_0 : y = mx$ allora $r_0 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \rangle$

$$R_{r_0}(e_1) = 2\, pr_{\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}}(e_1) - e_1$$

$$= \frac{2}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1+m^2 \\ 2m \end{pmatrix}$$

$$R_{r_0}(e_2) = 2\, pr_{\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}}(e_2) - e_2$$

$$= \frac{2m}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 2m \\ m^2-1 \end{pmatrix}$$

$$Q_{r_0} = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1+m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\vartheta & \sin 2\vartheta \\ \sin 2\vartheta & -\cos 2\vartheta \end{pmatrix}$$

$$m = \operatorname{Tg} \vartheta$$

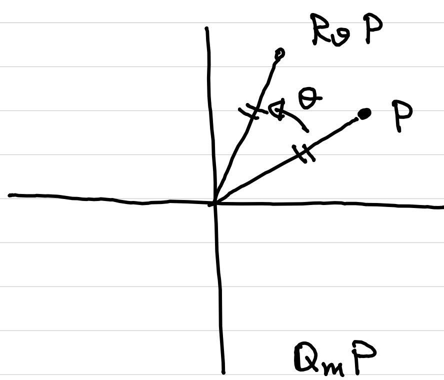
Le isometrie lineari del piano sono

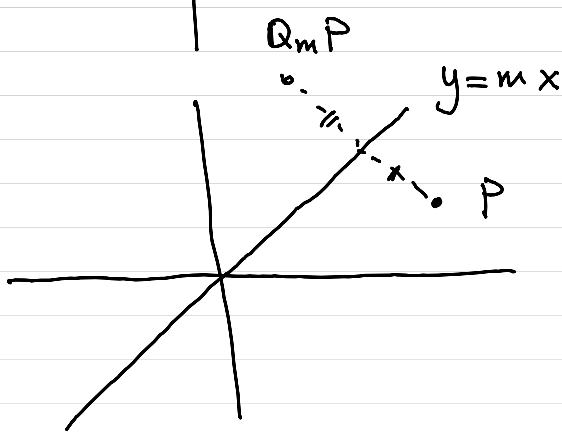
1) le matrici di rotazione

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

2) le matrici di riflessione

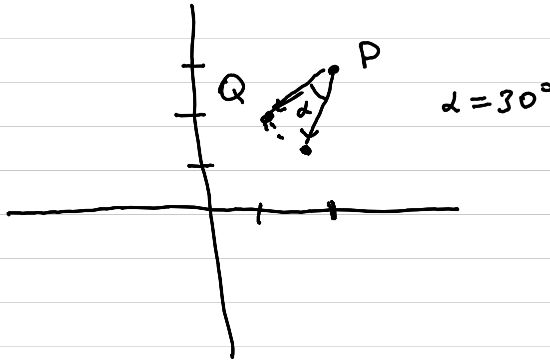
$$Q_m = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$$





Es: Sia $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Trovare il punto ottenuto ruotando Q attorno a $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ di $30°$ in senso anti-orario.

Sol.:



Il punto cercato è

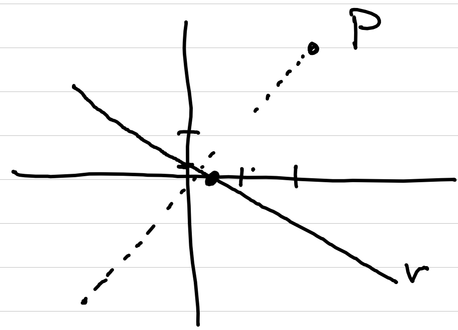
$$P + R_{30°}(Q-P) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 - \sqrt{3} \\ 5 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

(giace sulla bisettrice $x = y$)

Es: Sia $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Trovare il punto ottenuto riflettendo ortogonalmente Q attraverso la retta $r: 2x+3y=1$

Sol.:



$r = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad r: y = -\frac{2}{3}x + 1$

ha pendenza $m = -\frac{2}{3}$

Poniamo $X_0 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Allora il punto cercato è

$$X_0 + Q_m (P - X_0) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^2} \begin{pmatrix} 1-\frac{4}{9} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{9}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{9}{13} \begin{pmatrix} 5/9 & -12/9 \\ -12/9 & -5/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{9}{13} \begin{pmatrix} 5/9 & -12/9 \\ -12/9 & -5/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ -12 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{13} \begin{pmatrix} \frac{15}{2} - 36 \\ -18 - 15 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -57/2 \\ -33 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -22 \\ -33 \end{pmatrix}$$