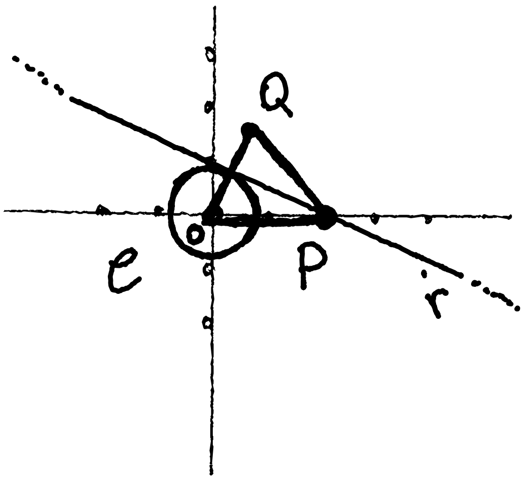
12 febbraio 2024 Nome, Cognome e Matricola

Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo* $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, *il vettore* $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ *e la retta* $r = P + \langle v \rangle$

1. *(1 punto) Calcolare equazioni cartesiane della retta* r.
2. *(1 punto) Calcolare la pendenza* m *della retta* r.
3. *(1 punto) Calcolare il punto* Q *ottenuto riflettendo ortogonalmente l'origine* O *attraverso la retta* r.
4. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo* T *di vertici* O, P, Q.
5. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche della bisettrice del triangolo* T *nel vertice* O.
6. *(1 punto) Calcolare la distanza dell'origine* O *dalla retta* r.
7. *(1 punto) Calcolare equazioni cartesiane e parametriche della circonferenza* $\mathcal{C}$ *di centro* O *e tangente alla retta* r.

Fare un disegno che illustri la situazione.



1) $r: \; x+2y=2$ 2) $m = -\frac{1}{2}$

3) $Q_m = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$. $Q_{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 3/4 & -1 \\ -1 & -3/4 \end{pmatrix}$

$$Q = P + Q_{-\frac{1}{2}}(-P) = \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4) $\text{Area}(T) = \frac{1}{2}\left|\det(P|Q)\right| = \frac{4}{10}\left|\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right|$

$$= \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

5) bisettrice $= \left\langle \frac{1}{\|P\|}P + \frac{1}{\|Q\|}Q \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

6) $\text{dist}(O, r) = \text{dist}\left(O, \frac{Q}{2}\right) = \left\|\frac{Q}{2}\right\| = \frac{2}{5}\sqrt{5}$. Alternativamente,

$$\text{dist}(O, r) = \frac{|0+2\cdot 0-2|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

7) raggio $= \frac{2}{5}\sqrt{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, centro $= O$. $\mathcal{C} = \left\{ \frac{2}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \,\middle|\, \theta \in [0, 2\pi) \right\}$

$$\mathcal{C}: \; x^2 + y^2 = \frac{4}{5}$$

Esercizio 2. *In $\mathbb{R}^3$ consideriamo le due rette*

$$r_1 : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 4x_3 + 3x_3 &= 2 \end{cases} \qquad e \qquad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

1. *(1 punto) Stabilire la posizione reciproca di r_1 ed r_2, senza cambiare la loro forma.*
2. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche di r_1.*
3. *(1 punto) Sia v_1 un vettore direttore di r_1 e $v_2 = (1, -2, 1)^t$ il vettore direttore di r_2 fornito dal testo. Calcolare $v_3 = v_1 \wedge v_2$.*
4. *(1 punto) Calcolare la distanza tra r_1 ed r_2.*
5. *(1 punto) Dimostrare che le due rette r_1 ed r_2 sono ortogonali.*
6. *(1 punto) Sia π_1 il piano passante per r_1 ed ortogonale ad r_2 e sia π_2 il piano passante per r_2 ed ortogonale ad r_1. Calcolare equazioni cartesiane della retta $r_3 = \pi_1 \cap \pi_2$.*
7. *(1 punto) Calcolare $Q_1 = \pi_2 \cap r_1$ e $Q_2 = \pi_1 \cap r_2$. Dimostrare che r_3 è la retta di minima distanza tra r_1 ed r_2 ovvero la retta tale che $dist(r_1, r_2) = dist(Q_1, Q_2)$.*

Sol.: 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. $Av_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r_1$ ed r_2 non sono parallele. $rg(Av_2 \mid b - AP_2) = rg\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 13 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 1 = rg(Av_2)$ $\Rightarrow r_1 \cap r_2 = \phi$. Le rette sono sghembe.

2) $r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = P_1 + \langle v_1 \rangle$.

3) $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 = v_1 \wedge v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

4) $dist(r_1, r_2) = \dfrac{|P_2 - P_1 \cdot v_1 \wedge v_2|}{\|v_1 \wedge v_2\|} = \dfrac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{30}} = \dfrac{7}{\sqrt{30}}$. 5) $v_1 \cdot v_2 = 0$.

6) $\pi_1 : v_2 \cdot X = v_2 \cdot P_1 \Rightarrow \pi_1 : x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$
$\pi_2 : v_1 \cdot X = v_1 \cdot P_2 \Rightarrow \pi_2 : 2x_1 + x_2 = 3$
$\Rightarrow r_3 : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$

7) $Q_1 : v_1 \cdot (P_1 + t v_1) = 3 \iff t = \dfrac{3 - v_1 \cdot P_1}{v_1 \cdot v_1} = \dfrac{1}{5} \Rightarrow Q_1 = P_1 + \dfrac{1}{5} v_1 = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$Q_2 : v_2 \cdot (P_2 + t v_2) = 1 \iff t = \dfrac{1 - v_2 \cdot P_2}{v_2 \cdot v_2} = \dfrac{1}{6} \Rightarrow Q_2 = P_2 + \dfrac{1}{6} v_2 = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

$\|Q_2 - Q_1\| = \dfrac{7}{30} \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \dfrac{7}{30}\sqrt{30} = dist(r_1, r_2)$

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 8 & -2 \\ 10 & -7 & 2 \\ 80 & -64 & 17 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare il determinante di A.*
2. *(1 punto) Calcolare A^2.*
3. *(1 punto) Trovare l'unico vettore v tale che $Av = e_1$.*
4. *(1 punto) Calcolare una base di $V_1(A)$, ovvero l'autospazio di A relativo all'autovalore 1.*
5. *(1 punto) Calcolare una base di $V_{-1}(A)$, ovvero l'autospazio di A relativo all'autovalore (-1).*
6. *(1 punto) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. Nel caso lo sia, trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*
7. *(1 punto) Dimostrare che una matrice diagonalizzabile $n \times n$ avente come unico autovalore 1 è la matrice identità.*

1) $\det A = \det \begin{pmatrix} -9 & 8 & -2 \\ 10 & -7 & 2 \\ 80 & -64 & 17 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -9 & 8 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 8 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -9 & 17 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 9 & -1 \end{pmatrix}$

$= -\det \begin{pmatrix} 17 & -2 \\ 9 & -1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 9 & -1 \end{pmatrix} = -1$

2) $A^2 = \mathbb{1}_3 . \Rightarrow A = A^{-1}.$

3) Poiché $A = A^{-1}$, $v = Ae_1 = A^1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 10 \\ 80 \end{pmatrix}.$

4) $V_1(A) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 10 & -8 & 2 \\ -10 & 8 & -2 \\ -80 & 64 & -16 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -5 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$

5) $V_{-1}(A) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 8 & -8 & 2 \\ -10 & 6 & -2 \\ -80 & 64 & -18 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -5 & 3 & -1 \\ -40 & 32 & -9 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/8 \\ 0 & 1 & -1/8 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle$

6) $V_1(A) \cap V_{-1}(A) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, $\dim V_1(A) + \dim V_{-1}(A) = 2 + 1 = 3 \Rightarrow \mathbb{R}^3 = V_1(A) \oplus V_{-1}(A).$

$\Rightarrow A$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}$, $D = \mathrm{diag}(1, 1, -1).$

7) Se A è diagonalizzabile con unico autovalore 1, allora esiste B invertibile tale che $B^{-1}AB = \mathbb{1}_n \Rightarrow A = BB^{-1} = \mathbb{1}_n$.

Esercizio 4. *Consideriamo l'applicazione lineare* $F : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$

$$F(p(x)) = (x+1)p(x+1) - xp'(x+1)$$

per ogni $p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

1. *(1 punto) Calcolare la matrice A associata ad F nelle basi standard.*
2. *(1 punto) Stabilire se F è iniettiva.*
3. *(1 punto) Trovare una base $\mathcal{B}_{Im(F)}$ dell'immagine di F.*
4. *(1 punto) Trovare l'unico polinomio $p(x)$ tale che $F(p(x)) = 1+x+x^3$.*
5. *(1 punto) Dimostrare che i tre polinomi $q_1(x) = 1+x$, $q_2(x) = 1+x+x^2$ e $q_3(x) = 1+x+x^2+x^3$ sono linearmente indipendenti.*
6. *(1 punto) Trovare un polinomio $q_4(x)$ tale che l'insieme $\mathcal{B} = (q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x))$ sia una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.*
7. *(1 punto) Calcolare la matrice associata ad F nella base standard in partenza e nella base $\mathcal{B}$ in arrivo.*

Sol.: 1) $F(1) = X+1$, $F(X) = (X+1)^2 - X = X^2+X+1$, $F(X^2) = X^3+X^2+X+1$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) $\mathrm{rg} A = 3 \Rightarrow \mathrm{Ker}\, A = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \Rightarrow \mathrm{Ker}\, F = \{0_{\mathbb{R}[x]_{\leq 2}}\} \Rightarrow F$ iniettiva.

3) Poiché F è iniettiva, una base di $\mathrm{Im} F$ è $(F(1), F(x), F(x^2))$.

4) $F(X^2 - X + 1) = 1 + X + X^3 \Rightarrow p(x) = 1 - X + X^2$

5) $q_1 = F(1)$, $q_2 = F(x)$, $q_3 = F(x^2)$. Poiché F è iniettiva essi sono lin. ind.

6) $q_4 = 1$

7) $F(1) = q_1$, $F(X) = q_2$, $F(X^2) = q_3 \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Esercizio 5. *Consideriamo*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = 3.$$

consideriamo il polinomio di grado due $p(X) = X^t AX + 2b \cdot X + c$ *nella variabile vettoriale* $X = (x_1, x_2)^t$ *e la corrispondente conica* $\mathcal{C}_p = \{X \in \mathbb{R}^2 |\, p(X) = 0\}$.

1. *(1 punto) Calcolare* $p(X)$.
2. *(1 punto) Dimostrare che* A *è ortogonalmente diagonalizzabile.*
3. *(1 punto) Calcolare la segnatura di* A.
4. *(1 punto) Trovare una matrice ortogonale* B *ed una matrice diagonale* D *tali che* $B^t AB = D$.
5. *(1 punto) Trovare il polinomio* $q(Y)$ *ottenuto da* $p(X)$ *mediante il cambio di variabile* $X = BY$.
6. *(1 punto) Trovare il centro* C *della conica, ovvero un vettore* C *tale che il cambio di variabile* $Y = Z + C$ *trasformi il polinomio* $q(Y)$ *in un polinomio* $r(Z)$ *che non ha parte lineare.*
7. *(1 punto) Trovare la forma canonica metrica di* $\mathcal{C}_p$ *e stabilire di quale conica si tratta.*

1. $p(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 + 2x_2 + 3$

2. Poiché $A = A^t$, essa è ortogonalmente diagonalizzabile per il teorema spettrale.

3. $Sp(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$. $\lambda_1\lambda_2 = \det A = -3 < 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Tr}A = 2 > 0 \Rightarrow \lambda_1 < 0 < \lambda_2$
$\Rightarrow sg(A) = (1, 1)$.

4) $p_A(x) = x^2 - \mathrm{Tr}A\, x + \det A = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) \Rightarrow Sp(A) = (-1, 3)$.
$V_3(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. $V_{-1}(A) = V_3(A)^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$. $B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5) $q(Y) = Y^t DY + 2B^t b \cdot Y + c$. $B^t b = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$. $\Rightarrow q(Y) = -y_1^2 + 3y_2^2 + 2\sqrt{2}\, y_2 + 3$.

6) $DC = -B^t b \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$. $q(C) = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} + 3 = \frac{7}{3} = \frac{\det \hat{A}}{\det A} = \frac{-7}{-3}$.
$r(Z) = q(Z + C) = Z^t DZ + q(C) = -z_1^2 + 3z_2^2 + \frac{7}{3}$.

7) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $a = \sqrt{\frac{7}{3}}$, $b = \sqrt{\frac{7}{9}}$. $\mathcal{C}_p$ è un'iperbole.