Nome, Cognome e Matricola

Esame scritto di Geometria
Ingegneria Chimica
Primo appello a.a. 2023/24
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

18 gennaio 2024

Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo i punti* $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *e* $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche e cartesiane della retta* r *passante per* C *e* P.
2. *(1 punto) Calcolare la pendenza* m *della retta* r.
3. *(1 punto) Calcolare il punto medio* M *del segmento* $\overline{CP}$.
4. *(1 punto) Calcolare equazioni cartesiane dell'asse* s *del segmento* $\overline{CP}$.
5. *(1 punto) Calcolare equazioni cartesiane e parametriche della circonferenza* $\mathcal{C}$ *di centro* C *e passante per* P.
6. *(1 punto) Trovare i due punti* A *e* B *tali che i triangoli* ACP *e* BCP *siano equilateri.*
7. *(1 punto) Calcolare l'area del rombo di vertici* A, C, B *e* P.

Fare un disegno che illustri la situazione.

Esercizio 2. *In $\mathbb{R}^3$ consideriamo*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e le due rette $r_1 = P_1 + \langle v_1 \rangle$ e $r_2 = P_2 + \langle v_2 \rangle$.

1. *(1 punto) Calcolare $v_1 \wedge v_2$. Dedurre che r_1 e r_2 non sono parallele.*
2. *(1 punto) Trovare equazioni cartesiane del piano $\pi = P_1 + \langle v_1, v_2 \rangle$. Dedurre che le rette r_1 ed r_2 si intersecano in un punto.*
3. *(1 punto) Calcolare il punto di intersezione $P_3 = r_1 \cap r_2$, senza cambiare la forma di r_1 e di r_2.*
4. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo T di vertici P_1, P_2 e P_3.*
5. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche e cartesiane della retta r_3 passante per P_1 e P_2.*
6. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche per la bisettrice del triangolo T nel vertice P_3.*
7. *(1 punto) E' vero che $(v_1 \wedge v_1) \wedge v_2 = v_1 \wedge (v_1 \wedge v_2)$?*

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare la traccia di A.*
2. *(1 punto) Trovare una base di $Col(A)$ e calcolare il rango di A.*
3. *(1 punto) Stabilire se il vettore $v = (1, 1, 0, 0)^t$ è un autovettore per A.*
4. *(1 punti) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
5. *(1 punto) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*
6. *(1 punto) Trovare una formula per calcolare A^2X per ogni $X \in \mathbb{R}^4$.*
7. *(1 punto) Trovare una formula per A^n per ogni $n \geq 1$.*

Esercizio 4. *Sia* $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ *lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale di due a coefficienti reali. Si consideri l'endomorfismo lineare* $F : V \to V$ *di* V *definito come*

$$F(p(x)) = xp'(x+1) - x^2 p''(x-1)$$

per ogni $p(x) \in V$.

1. *(1 punto) Calcolare* $F(3 - 2x + 3x^2)$.
2. *(1 punto) Calcolare la matrice* A *associata ad* F *nella base standard* $\mathcal{C} = (1, x, x^2)$ *di* V.
3. *(1 punto) Calcolare il rango di* F.
4. *(1 punto) Trovare una base* $\mathcal{B}_{Ker(F)}$ *del nucleo di* F.
5. *(1 punto) Trovare una base* $\mathcal{B}_{Im(F)}$ *dell'immagine di* F.
6. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathcal{B} = (1 - x - x^2, 1 + x + 2x^2, x + 2x^2)$ *è una base di* V.
7. *(1 punto) Calcolare la matrice* C *associata ad* F *nella base* $\mathcal{B}$.

Esercizio 5. *Si consideri il vettore* $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ *e la matrice* $A = vv^t$.

1. *(1 punto) Calcolare* A.
2. *(1 punto) Trovare una base per* $Col(A)$ *e calcolare il rango di* A.
3. *(1 punto) Calcolare una base* $\mathcal{B}_{Ker(A)}$ *del nucleo di* A.
4. *(1 punto) Dimostrare che* A *è ortogonalmente diagonalizzabile.*
5. *(1 punto) Calcolare lo spettro di* A.
6. *(1 punto) Trovare una matrice ortogonale* B *ed una matrice diagonale* D *tali che* $B^tAB = D$.
7. *(1 punto) Calcolare la matrice* P_v *di proiezione ortogonale sulla retta generata da* v *e la distanza del punto* $Q = (4, 8, 0, -4)^t$ *dall'iperpiano* $\pi = v^\perp$.