Nome, Cognome e Matricola

Esame scritto di Geometria
Ingegneria Chimica
Secondo appello aa: 2023/24
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

12 febbraio 2024

Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo la retta* $r = P + \langle v \rangle$ *dove*

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Calcolare equazioni cartesiane della retta* r*.*
2. *(1 punto) Calcolare la pendenza* m *della retta* r*.*
3. *(1 punto) Calcolare il punto* Q *ottenuto riflettendo ortogonalmente l'origine* O *attraverso la retta* r*.*
4. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo* T *di vertici* O*,* P*,* Q*.*
5. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche della bisettrice del triangolo* T *nel vertice* O*.*
6. *(1 punto) Calcolare la distanza dell'origine* O *dalla retta* r*.*
7. *(1 punto) Calcolare equazioni cartesiane e parametriche della circonferenza* $\mathcal{C}$ *di centro* O *e tangente alla retta* r*.*

Fare un disegno che illustri la situazione.

Esercizio 2. *In* $\mathbb{R}^3$ *consideriamo le due rette*

$$r_1 : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases} \quad e \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

1. *(1 punto) Stabilire la posizione reciproca di* r_1 *ed* r_2*, senza cambiare la loro forma.*
2. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche di* r_1*.*
3. *(1 punto) Sia* v_1 *un vettore direttore di* r_1 *e* $v_2 = (1, -2, 1)^t$ *il vettore direttore di* r_2 *fornito dal testo. Calcolare* $v_3 = v_1 \wedge v_2$*.*
4. *(1 punto) Calcolare la distanza tra* r_1 *ed* r_2*.*
5. *(1 punto) Dimostrare che le due rette* r_1 *ed* r_2 *sono ortogonali.*
6. *(1 punto) Sia* π_1 *il piano passante per* r_1 *ed ortogonale ad* r_2 *e sia* π_2 *il piano passante per* r_2 *ed ortogonale ad* r_1*. Calcolare equazioni cartesiane della retta* $r_3 = \pi_1 \cap \pi_2$*.*
7. *(1 punto) Calcolare* $Q_1 = \pi_2 \cap r_1$ *e* $Q_2 = \pi_1 \cap r_2$*. Dimostrare che* r_3 *è la retta di minima distanza tra* r_1 *ed* r_2 *ovvero la retta tale che* $dist(r_1, r_2) = dist(Q_1, Q_2)$*.*

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 8 & -2 \\ 10 & -7 & 2 \\ 80 & -64 & 17 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare il determinante di* A.
2. *(1 punto) Calcolare* A^2.
3. *(1 punto) Trovare l'unico vettore* v *tale che* $Av = e_1$.
4. *(1 punto) Calcolare una base di* $V_1(A)$, *ovvero l'autospazio di* A *relativo all'autovalore* 1.
5. *(1 punto) Calcolare una base di* $V_{-1}(A)$, *ovvero l'autospazio di* A *relativo all'autovalore* (-1).
6. *(1 punto) Stabilire se* A *è diagonalizzabile su* $\mathbb{R}$. *Nel caso lo sia, trovare una matrice invertibile* B *ed una matrice diagonale* D *tali che* $B^{-1}AB = D$.
7. *(1 punto) Dimostrare che una matrice diagonalizzabile* $n \times n$ *avente come unico autovalore* 1 *è la matrice identità.*

Esercizio 4. *Consideriamo l'applicazione lineare* $F : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$

$$F(p(x)) = (x+1)p(x+1) - xp'(x+1)$$

per ogni $p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

1. *(1 punto) Calcolare la matrice* A *associata ad* F *nelle basi standard.*
2. *(1 punto) Stabilire se* F *è iniettiva.*
3. *(1 punto) Trovare una base* $\mathcal{B}_{Im(F)}$ *dell'immagine di* F.
4. *(1 punto) Trovare l'unico polinomio* $p(x)$ *tale che* $F(p(x)) = 1 + x + x^3$.
5. *(1 punto) Dimostrare che i tre polinomi* $q_1(x) = 1+x$, $q_2(x) = 1+x+x^2$ *e* $q_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ *sono linearmente indipendenti.*
6. *(1 punto) Trovare un polinomio* $q_4(x)$ *tale che l'insieme* $\mathcal{B} = (q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x))$ *sia una base di* $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.
7. *(1 punto) Calcolare la matrice associata ad* F *nella base standard in partenza e nella base* $\mathcal{B}$ *in arrivo.*

Esercizio 5. *Siano*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = 3.$$

Consideriamo il polinomio di secondo grado

$$p(X) = X^t A X + 2b \cdot X + c$$

nella variabile vettoriale $X = (x_1, x_2)^t$ *e la conica* $\mathcal{C}_p = \{X \in \mathbb{R}^2 | \, p(X) = 0\}$.

1. *(1 punto) Calcolare* $p(X)$.
2. *(1 punto) Dimostrare che* A *è ortogonalmente diagonalizzabile.*
3. *(1 punto) Calcolare la segnatura di* A.
4. *(1 punto) Trovare una matrice ortogonale* B *ed una matrice diagonale* D *tali che* $B^t A B = D$.
5. *(1 punto) Trovare il polinomio* $q(Y)$ *ottenuto da* $p(X)$ *mediante il cambio di variabile* $X = BY$.
6. *(1 punto) Trovare il centro* C *della conica, ovvero un vettore* C *tale che il cambio di variabile* $Y = Z + C$ *trasformi il polinomio* $q(Y)$ *in un polinomio* $r(Z)$ *che non ha parte lineare.*
7. *(1 punto) Trovare la forma canonica metrica di* $\mathcal{C}_p$ *e stabilire di quale conica si tratta.*