Nome, Cognome e Matricola

Esame scritto di Geometria
Ingegneria chimica
Quarto appello aa: 2023/24
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

16 settembre 2024

Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo il triangolo* T *avente come vertici i tre punti*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. *(2 punti) Trovare il circoncentro* C *di* T*.*
2. *(2 punti) Trovare le equazioni cartesiane e parametriche della circonferenza* $\mathcal{C}$ *circoscritta a* T*.*
3. *(1 punti) Stabilire se il triangolo* T *è rettangolo, ottusangolo oppure acutangolo.*
4. *(1 punto) Trovare il punto* P_4 *ottenuto riflettendo ortogonalmente il punto* P_3 *attraverso la retta* r *passante per* P_1 *e* P_2*.*
5. *(1 punto) Calcolare il coseno dell'angolo* $\theta \in [0, 2\pi)$ *tale che il punto* P_3 *è la rotazione del punto* P_2 *attorno a* C *in senso anti-orario dell'angolo* θ*.*

Fare un disegno che illustri la situazione.

Soluzione Esercizio 1.

Esercizio 2. *In* $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ *consideriamo i quattro punti*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 100 \\ 2 \\ -20 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Stabilire se i tre punti* P_1, P_2 *e* P_3 *sono allineati.*

2. *(2 punti) Calcolare l'area del triangolo* T *di vertici* P_1, P_2 *e* P_3.

3. *(2 punti) Calcolare l'equazione cartesiana e le equazioni parametriche del più piccolo sottospazio affine di* $\mathbb{R}^3$ *che contiene i tre punti* P_1, P_2 *e* P_3. *Denotarlo con* π.

4. *(1 punto) Calcolare la distanza del punto* Q *da* π.

5. *(1 punto) Calcolare il volume della piramide di vertici* P_1, P_2, P_3 *e* Q.

Soluzione Esercizio 2.

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare il determinante di A.*
2. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
3. *(1 punto) Determinare lo spettro di A.*
4. *(2 punti) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. Nel caso lo sia, trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*
5. *(1 punto) Calcolare l'inversa di A utilizzando il teorema di Cayley-Hamilton.*
6. *(1 punto) Calcolare l'inversa di A utilizzando la formula di Cramer.*

Soluzione Esercizio 3.

Esercizio 4. *Studiare il seguente sistema lineare nelle variabili* $x_1, \cdots, x_5$ *al variare del parametro* $k \in \mathbb{R}$*:*

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + (k+1)x_3 + (k+4)x_4 + (k+2)x_5 & = & 6k+1 \\ kx_2 + (k+1)x_3 + 3x_4 + 2x_5 & = & 2k \\ 2x_1 - kx_2 - (k+1)x_3 + (2-k)x_4 + (1-k)x_5 & = & 3k-1 \end{cases}$$

Soluzione Esercizio 4.

Esercizio 5. *Consideriamo il seguente insieme ordinato di vettori di* $\mathbb{R}^4$*:*

$$\mathcal{B} = \left(v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

ed il vettore $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathcal{B}$ *è una base di* $\mathbb{R}^4$.
2. *(2 punti) Utilizzare l'algoritmo di Gram-Schmidt su* $\mathcal{B}$ *per trovare una base ortogonale* $\mathcal{C} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$ *di* $(\mathbb{R}^4, \cdot)$ *tale che* $\langle v_1, \cdots, v_i \rangle = \langle F_1, \cdots, F_i \rangle$ *per ogni* $i = 1, \cdots, 4$.
3. *(1 punto) Trovare le equazioni cartesiane di* $\langle v_1, v_2 \rangle$.
4. *(1 punto) Calcolare le coordinate di* P *nella base* $\mathcal{C}$.
5. *(1 punti) Trovare il più grande indice* j *tale che* $P \notin \langle v_1, \cdots, v_j \rangle$.
6. *(1 punto) Denotare con* U *il sottospazio* $U = \langle v_1, \cdots, v_j \rangle$ *trovato al punto precedente. Calcolare la distanza di* P *da* U.

Soluzione Esercizio 5.