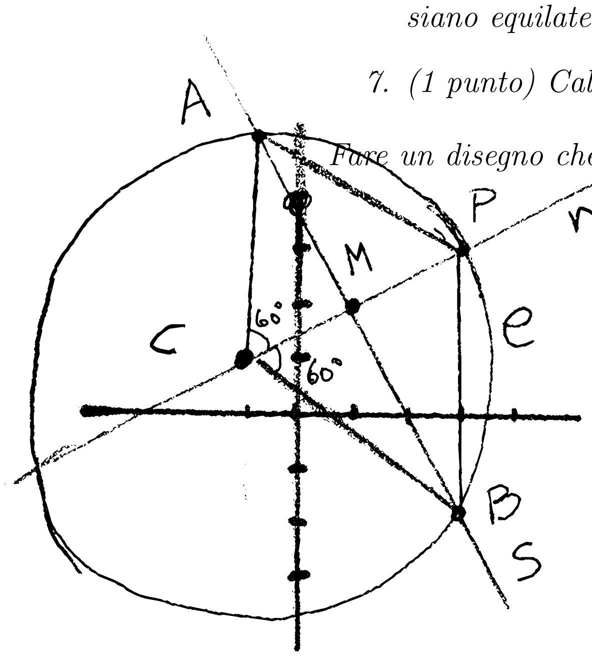
Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo i punti* $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *e* $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche e cartesiane della retta* r *passante per* C *e* P.
2. *(1 punto) Calcolare la pendenza* m *della retta* r.
3. *(1 punto) Calcolare il punto medio* M *del segmento* $\overline{CP}$.
4. *(1 punto) Calcolare equazioni cartesiane dell'asse* s *del segmento* $\overline{CP}$.
5. *(1 punto) Calcolare equazioni cartesiane e parametriche della circonferenza* $\mathcal{C}$ *di centro* C *e passante per* P.
6. *(1 punto) Trovare i due punti* A *e* B *tali che i triangoli* ACP *e* BCP *siano equilateri.*
7. *(1 punto) Calcolare l'area del rombo di vertici* A, C, B *e* P.

Fare un disegno che illustri la situazione.



1. $r = C + \langle P-C \rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle : x - 2y = -3$

2. $m = \frac{1}{2}$

3. $M = \frac{1}{2}(C+P) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

4. $s : (P-C)\cdot X = (P-C)\cdot M \Rightarrow s : 2x + y = 4$

5. $\mathcal{C} : (x+1)^2 + (y-1)^2 = 20$

$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sqrt{20}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta \in [0, 2\pi) \right\}.$

6. $A = C + R_{\frac{\pi}{3}}(P-C) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 2+2\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MA} \Rightarrow B = 2M - A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 2+2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 2-2\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Alternativamente, $\{A, B\} = \mathcal{C} \cap s$.

7) Area del rombo $= 2$ Area triangolo $\widehat{CAP} = b \times h = |\overline{CP}|\,|\overline{AM}|$

$= \|P-C\|\,\|A-M\| = \sqrt{20}\,\left\| \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\| = 2\sqrt{5}\,\sqrt{3}\,\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = 10\sqrt{3}.$

Esercizio 2. *In* $\mathbb{R}^3$ *consideriamo*

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}$$

e le due rette $r_1 = P_1 + \langle v_1 \rangle$ *e* $r_2 = P_2 + \langle v_2 \rangle$.

1. *(1 punto) Calcolare* $v_1 \wedge v_2$. *Dedurre che* r_1 *e* r_2 *non sono parallele.*
2. *(1 punto) Trovare equazioni cartesiane del piano* $\pi = P_1 + \langle v_1, v_2 \rangle$. *Dedurre che le rette* r_1 *ed* r_2 *si intersecano in un punto.*
3. *(1 punto) Calcolare il punto di intersezione* $P_3 = r_1 \cap r_2$, *senza cambiare la forma di* r_1 *e di* r_2.
4. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo* T *di vertici* P_1, P_2 *e* P_3.
5. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche e cartesiane della retta* r_3 *passante per* P_1 *e* P_2.
6. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche per la bisettrice del triangolo* T *nel vertice* P_3.
7. *(1 punto) Calcolare* $v_1 \wedge v_1 \wedge v_2$.

Sol.: 1. $v_1 \wedge v_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow v_1$ e v_2 sono lin. ind.

$\Rightarrow r_1$ ed r_2 non sono parallele.

2. $\pi : (v_1 \wedge v_2) \cdot X = (v_1 \wedge v_2) \cdot P_1 \Rightarrow \pi : x + y - 3z = -3$. Notiamo che $P_2 \in \pi$.

Quindi $r_1, r_2 \subset \pi \Rightarrow r_1$ ed r_2 sono complanari non parallele $\Rightarrow r_1 \cap r_2 = \{P_3\}$.

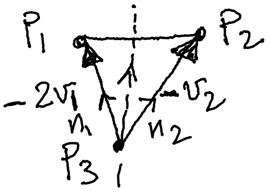
3. $P_3 = P_1 + t_1 v_1 = P_2 + t_2 v_2 \Rightarrow (v_1 | v_2) \begin{pmatrix}t_1\\-t_2\end{pmatrix} = P_2 - P_1$. Risolviamo:

$$(v_1\, v_2 \,|\, P_2 - P_1) = \left(\begin{array}{cc|c}1&2&0\\2&1&3\\1&1&1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c}1&2&0\\0&-3&3\\0&-1&1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c}1&2&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{array}\right)$$

$\Rightarrow t_1 = 2$ e $t_2 = -(-1) = 1 \Rightarrow P_3 = P_1 + 2v_1 = P_2 + v_2 = \begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}$

4. $\text{Area}(T) = \frac{1}{2} \| (P_1 - P_3) \wedge (P_2 - P_3) \| = \frac{1}{2} \| (-2v_1) \wedge (-v_2) \| = \| v_1 \wedge v_2 \| = \sqrt{11}$

5. $r_3 = P_1 + \langle P_2 - P_1 \rangle = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} \right\rangle : \begin{cases} x = -1 \\ y - 3z = -2 \end{cases}$

6. 

$n_1 = \frac{-2v_1}{\|-2v_1\|} = -\frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}, \quad n_2 = -\frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix}$

bisettrice $= P_3 + \langle n_1 + n_2 \rangle = \begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix} \right\rangle$.

7. $v_1 \wedge (v_1 \wedge v_2) = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\4\\-1\end{pmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^3} = (v_1 \wedge v_1) \wedge v_2 \Rightarrow$ La domanda non è ben posta.

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare la traccia di A.*
2. *(1 punto) Trovare una base di $Col(A)$ e calcolare il rango di A.*
3. *(1 punto) Stabilire se il vettore $v = (1,1,0,0)^t$ è un autovettore per A.*
4. *(1 punti) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
5. *(1 punto) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*
6. *(1 punto) Trovare una formula per calcolare A^2X per ogni $X \in \mathbb{R}^4$.*
7. *(1 punto) Trovare una formula per A^n per ogni $n \geq 1$.*

Sol.: 1) $Tr(A) = 6$. 2) $Col(A) = \langle A^1, A^2 \rangle \Rightarrow rg\, A = 2$.

3) $Av = A^1 + A^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \langle v \rangle \Rightarrow v$ non è un autovettore per A.

4) $$P_A(x) = \det\begin{pmatrix} x-1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & x-2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & x-2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x & 0 & -x & 0 \\ 0 & x-1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & x-2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & x-2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & x-3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & x-2 \end{pmatrix}$$

$$= x \det\begin{pmatrix} x-1 & 0 & -2 \\ 0 & x-3 & 0 \\ -1 & 0 & x-2 \end{pmatrix} = x \det\begin{pmatrix} x & 0 & -x \\ 0 & x-3 & 0 \\ -1 & 0 & x-2 \end{pmatrix} = x \det\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x-3 & 0 \\ -1 & 0 & x-3 \end{pmatrix}$$

$$= x^2(x-3)^2 \Rightarrow Sp(A) = \{0,3\} \subset \mathbb{R}$$

5) $$V_0(A) = Ker\, A = Ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow mg_A(0) = 2 = ma_A(0)$$

$$V_3(A) = Ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = Col(A) \Rightarrow mg_A(3) = 2 = ma_A(3)$$

$\Rightarrow A$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = diag(0,0,3,3)$.

6) Poiché $V_3(A) = Col(A)$, $A^2X = A(AX) = 3AX \quad \forall\, X \in \mathbb{R}^4$

7) $A^nX = 3A^{n-1}X = \dots = 3^{n-1}AX \quad \forall X \in \mathbb{R}^4 \Rightarrow A^n = 3^{n-1}A$.

Esercizio 4. *Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale di due a coefficienti reali. Si consideri l'endomorfismo lineare $F : V \to V$ di V definito come*

$$F(p(x)) = xp'(x+1) - x^2 p''(x-1)$$

per ogni $p(x) \in V$.

1. *(1 punto) Calcolare $F(3 - 2x + 3x^2)$.*
2. *(1 punto) Calcolare la matrice A associata ad F nella base standard $\mathcal{C} = (1, x, x^2)$ di V.*
3. *(1 punto) Calcolare il rango di F.*
4. *(1 punto) Trovare una base $\mathcal{B}_{Ker(F)}$ del nucleo di F.*
5. *(1 punto) Trovare una base $\mathcal{B}_{Im(F)}$ dell'immagine di F.*
6. *(1 punto) Dimostrare che $\mathcal{B} = (1 - x - x^2, 1 + x + 2x^2, x + 2x^2)$ è una base di V.*
7. *(1 punto) Calcolare la matrice C associata ad F nella base $\mathcal{B}$.*

Sol.: 1) $F(3-2x+3x^2) = x(-2+6(x+1)) - 6x^2 = -2x+6x = 4x$

2) $F(1) = 0$, $F(x) = x$, $F(x^2) = 2x(x+1) - 2x^2 = 2x$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) $\operatorname{rg} F = \operatorname{rg} A = 1.$

4) $\mathcal{B}_{Ker\,A} = (e_1, 2e_2 - e_3) \Rightarrow \mathcal{B}_{Ker\,F} = (1, 2x - x^2)$

5) $\mathcal{B}_{Col\,A} = (e_2) \Rightarrow \mathcal{B}_{Im\,F} = (x)$.

6) $B = \left(F_e(1-x-x^2) \,|\, F_e(1+x+2x^2) \,|\, F_e(x+2x^2) \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. $\det B = 1 \neq 0$

$\Rightarrow F_e(\mathcal{B})$ è una base di $\mathbb{R}^3 \xRightarrow{F_e \text{ iso}} \mathcal{B}$ è una base di V

7)
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] & V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "F_e"] & V \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[d, "F_e"] & V \arrow[d, "F_e"] \\ \mathbb{R}^3 \arrow[r, "B"] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^3 & \mathbb{R}^3 \arrow[l, "B"'] \end{tikzcd}$$

$C = B^{-1}AB$. Calcoliamo B^{-1} con Cramer:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 6 & -10 & -10 \\ -6 & 10 & 10 \\ 9 & -15 & -15 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5. *Si consideri il vettore* $v = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ *e la matrice* $A = vv^t$.

1. *(1 punto) Calcolare* A.
2. *(1 punto) Trovare una base per* $Col(A)$ *e calcolare il rango di* A.
3. *(1 punto) Calcolare una base* $\mathcal{B}_{Ker(A)}$ *del nucleo di* A.
4. *(1 punto) Dimostrare che* A *è ortogonalmente diagonalizzabile.*
5. *(1 punto) Calcolare lo spettro di* A.
6. *(1 punto) Trovare una matrice ortogonale* B *ed una matrice diagonale* D *tali che* $B^tAB = D$.
7. *(1 punto) Calcolare la matrice* P_v *di proiezione ortogonale sulla retta generata da* v *e la distanza del punto* $Q = (4, 8, 0, -4)^t$ *dall'iperpiano* $\pi = v^\perp$.

Sol.: 1) $A = (v|v|v|v) = \begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$. 2) $Col(A) = \langle v \rangle \Rightarrow rg A = 1$.

3) $Ker A = v^\perp = \langle v_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \rangle$.

4) $A^t = (vv^t)^t = (v^t)^t v^t = vv^t = A \xrightarrow[\text{spettrale}]{\text{Teorema}} A$ è ort. diag.

5) $V_0(A) = Ker A = v^\perp$. $Av = vv^tv = (v\cdot v)v = 4v \Rightarrow Sp(A) = \{0, 4\}$.

6) $F_1 = v_1$, $F_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$; $F_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 - \frac{v_3 \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\\6\end{pmatrix}$

$E_1 = \frac{1}{\|F_1\|} F_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$; $E_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$; $E_3 = \frac{1}{\sqrt{48}}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\\6\end{pmatrix}$

$B = \left(E_1 | E_2 | E_3 | \frac{v}{\|v\|}\right) = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{48} & 1/2\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{48} & 1/2\\ 0 & 2/\sqrt{6} & -2/\sqrt{48} & 1/2\\ 0 & 0 & 6/\sqrt{48} & 1/2\end{pmatrix}$, $D = diag(0,0,0,4)$.

7) $P_v = \frac{1}{v\cdot v} vv^t = \frac{1}{4}A$. $dist(Q, v^\perp) = \|Q - pr_{v^\perp}(Q)\| = \|pr_v(Q)\|$

$= \|\frac{1}{4} AQ\| = \|A\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}\| = \|2v\| = 4$