

Esame scritto di Geometria
Quarto appello a.a. 2023/24
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Data esame scritto: 16 settembre 2024

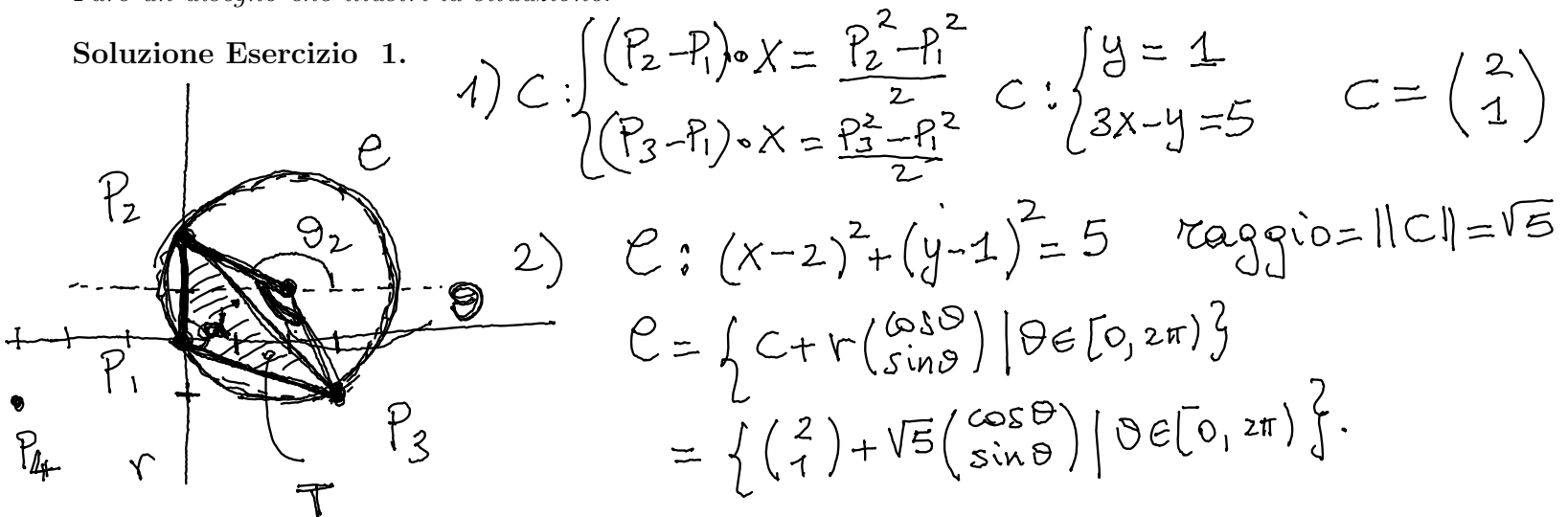
Esercizio 1. In (\mathbb{R}^2, \cdot) consideriamo il triangolo T avente come vertici i tre punti

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. (2 punti) Trovare il circoncentro C di T .
2. (2 punti) Trovare le equazioni cartesiane e parametriche della circonferenza \mathcal{C} circoscritta a T .
3. (1 punto) Stabilire se il triangolo T è rettangolo, ottusangolo oppure acutangolo.
4. (1 punto) Trovare il punto P_4 ottenuto riflettendo ortogonalmente il punto P_3 attraverso la retta r passante per P_1 e P_2 .
5. (1 punto) Calcolare il coseno dell'angolo $\theta \in [0, 2\pi)$ tale che il punto P_3 è la rotazione del punto P_2 attorno a C in senso anti-orario dell'angolo θ .

Fare un disegno che illustri la situazione.

Soluzione Esercizio 1.



3) $(P_2 - P_1) \cdot (P_3 - P_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 < 0 \Rightarrow \cos \alpha < 0 \Rightarrow \alpha \text{ è ottuso}$
 $\Rightarrow T \text{ è ottusangolo.}$

4) r è l'asse delle ordinate ovvero $r: x=0 \Rightarrow P_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$

5) $P_2 = C + r \begin{pmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{pmatrix}, \quad P_3 = C + r \begin{pmatrix} \cos \theta_3 \\ \sin \theta_3 \end{pmatrix}. \quad \theta = \theta_3 - \theta_2$

$\Rightarrow \cos \theta = \cos \theta_3 \cos \theta_2 + \sin \theta_3 \sin \theta_2$
 $\begin{pmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos \theta_3 \\ \sin \theta_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow \cos \theta = -\frac{2}{5} - \frac{2}{5} = -\frac{4}{5}$

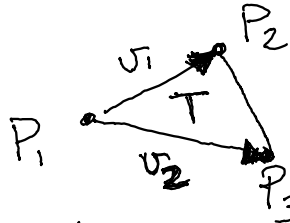
Esercizio 2. In (\mathbb{R}^3, \cdot) consideriamo i quattro punti

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 100 \\ 2 \\ -20 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Stabilire se i tre punti P_1 , P_2 e P_3 sono allineati.
2. (2 punti) Calcolare l'area del triangolo T di vertici P_1 , P_2 e P_3 .
3. (2 punti) Calcolare l'equazione cartesiana e le equazioni parametriche del più piccolo sottospazio affine di \mathbb{R}^3 che contiene i tre punti P_1 , P_2 e P_3 . Denotarlo con π .
4. (1 punto) Calcolare la distanza del punto Q da π .
5. (1 punto) Calcolare il volume della piramide di vertici P_1 , P_2 , P_3 e Q .

Soluzione Esercizio 2.

1) $v_1 = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono lin. ind. \Rightarrow I punti non sono allineati.



2) $\text{Area}(T) = \frac{1}{2} \|v_1 \wedge v_2\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2}$

3) $\pi = P_1 + \langle v_1, v_2 \rangle : y = 1$

4) $\text{dist}(Q, \pi) = 1$

5) $\frac{1}{3} \text{Area}(T) \text{dist}(Q, \pi) = \frac{1}{6}$.

Esercizio 3. Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Calcolare il determinante di A .
2. (1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A .
3. (1 punto) Determinare lo spettro di A .
4. (2 punti) Stabilire se A è diagonalizzabile su \mathbb{R} . Nel caso lo sia, trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.
5. (1 punto) Calcolare l'inversa di A utilizzando il teorema di Cayley-Hamilton.
6. (1 punto) Calcolare l'inversa di A utilizzando la formula di Cramer.

Soluzione Esercizio 3.

1) $\det A = -2$

2)
$$P_A(x) = \det \begin{pmatrix} x & -1 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -2 & 1 & x-1 \end{pmatrix} = (x-1) \det \begin{pmatrix} x & -1 \\ -2 & x-1 \end{pmatrix} = (x-1) \det \begin{pmatrix} x-2 & x-2 \\ -2 & x-1 \end{pmatrix}$$

$$= (x-1) \det \begin{pmatrix} x-2 & 0 \\ -2 & x+1 \end{pmatrix} = (x-1)(x+1)(x-2) = (x^2-1)(x-2)$$

$$= x^3 - 2x^2 - x + 2.$$

3)
$$P_A(A) = A^3 - 2A^2 - A + 2\mathbb{1}_3 \stackrel{\text{C-H}}{=} \mathbb{0}_{3 \times 3} \Rightarrow A(A^2 - 2A - \mathbb{1}_3) = -2\mathbb{1}_3$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2}(A^2 - 2A - \mathbb{1}_3) = -\frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4)
$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

5) $\text{SP}(A) = \{1, -1, 2\}$. 6) $A \in 3 \times 3$ ed ha 3 autovalori reali e distinti. Quindi A è diagonalizzabile su \mathbb{R} . $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Esercizio 4. Studiare il seguente sistema lineare nelle variabili x_1, \dots, x_5 al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + (k+1)x_3 + (k+4)x_4 + (k+2)x_5 = 6k+1 \\ kx_2 + (k+1)x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2k \\ 2x_1 - kx_2 - (k+1)x_3 + (2-k)x_4 + (1-k)x_5 = 3k-1 \end{cases}$$

Soluzione Esercizio 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & k & k+1 & k+4 & k+2 & | & 6k+1 \\ 0 & k & k+1 & 3 & 2 & | & 2k \\ 2 & -k & -(k+1) & 2-k & 1-k & | & 3k-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & k & k+1 & k+4 & k+2 & | & 6k+1 \\ 0 & k & k+1 & 3 & 2 & | & 2k \\ 0 & -3k & -3(k+1) & -3k-6 & -3k-3 & | & 3k-1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k+1 & k & | & 4k+1 \\ 0 & k & k+1 & 3 & 2 & | & 2k \\ 0 & 0 & 0 & -3k+3 & -3k+3 & | & -3k-3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k+1 & k & | & 4k+1 \\ 0 & k & k+1 & 3 & 2 & | & 2k \\ 0 & 0 & 0 & k-1 & k-1 & | & k+1 \end{pmatrix}$$

Se $k=0$ otteniamo $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$

Se $k=1$ otteniamo $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & | & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 2 \end{pmatrix}$

Se $k \neq 0$ e $k \neq 1$ otteniamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k+1 & k & | & 4k+1 \\ 0 & 1 & \frac{k+1}{k} & \frac{3}{k} & \frac{2}{k} & | & \frac{2}{k} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & \frac{k+1}{k-1} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & | & \frac{3k^2-5k-2}{k-1} \\ 0 & 1 & \frac{k+1}{k} & 0 & -\frac{1}{k} & | & \frac{2k^2-5k-3}{k(k-1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & \frac{k+1}{k-1} \end{pmatrix}$$

Il sistema è risolubile se e solo se $k \neq 1$.

Se $k=0$ le soluzioni sono $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Se $k \neq 1$ e $k \neq 0$ le soluzioni sono

$$\begin{pmatrix} \frac{3k^2-5k-2}{k-1} \\ \frac{2k^2-5k-3}{k(k-1)} \\ 0 \\ \frac{k+1}{k-1} \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{k+1}{k} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{k} \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Esercizio 5. Consideriamo il seguente insieme ordinato di vettori di \mathbb{R}^4 :

$$\mathcal{B} = \left(v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

ed il vettore $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- (1 punto) Dimostrare che \mathcal{B} è una base di \mathbb{R}^4 .
- (2 punti) Utilizzare l'algoritmo di Gram-Schmidt su \mathcal{B} per trovare una base ortogonale $\mathcal{C} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$ di (\mathbb{R}^4, \cdot) tale che $\langle v_1, \dots, v_i \rangle = \langle F_1, \dots, F_i \rangle$ per ogni $i = 1, \dots, 4$.
- (1 punto) Trovare le equazioni cartesiane di $\langle v_1, v_2 \rangle$.
- (1 punto) Calcolare le coordinate di P nella base \mathcal{C} .
- (1 punto) Trovare il più grande indice j tale che $P \notin \langle v_1, \dots, v_j \rangle$.
- (1 punto) Denotare con U il sottospazio $U = \langle v_1, \dots, v_j \rangle$ trovato al punto precedente. Calcolare la distanza di P da U .

Soluzione Esercizio 5.

$$1) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

$\Rightarrow \mathcal{B}$ è lin. Ind. $\implies \mathcal{B}$ è una base di \mathbb{R}^4 .

$$2) F_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, F_2 = v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, F_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 - \frac{v_3 \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Scegliamo } F_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, F_4 = v_4 - \frac{v_4 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 - \frac{v_4 \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 - \frac{v_4 \cdot F_3}{F_3 \cdot F_3} F_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Scegliamo } F_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$3) \langle v_1, v_2 \rangle : \begin{cases} F_3 \cdot X = 0 \\ F_4 \cdot X = 0 \end{cases} \quad \langle v_1, v_2 \rangle : \begin{cases} X_1 - X_3 = 0 \\ -X_2 + X_4 = 0 \end{cases}$$

$$4) P = \frac{P \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 + \frac{P \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 + \frac{P \cdot F_3}{F_3 \cdot F_3} F_3 + \frac{P \cdot F_4}{F_4 \cdot F_4} F_4 = \frac{1}{2} F_1 - \frac{3}{2} F_2 + 2 F_3 \Rightarrow F_{\mathcal{C}}(P) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$5) P \in \langle F_1, F_2, F_3 \rangle, P \notin \langle F_1, F_2 \rangle \Rightarrow j = 2. \quad 6) \text{pr}_U(P) = \frac{1}{2} F_1 - \frac{3}{2} F_2$$

$$\Rightarrow \text{dist}(P, U) = \|P - \text{pr}_U(P)\| = \|2 F_3\| = 2 \|F_3\| = 2\sqrt{2}.$$