

Argomenti da trattare in 4 lezioni

- ⊙ Praccia e det in termini di autovalori
(Teorema di Cayley-Hamilton)
- ⊙ Spazi euclidei
- ⊙ Teorema spettrale
- ⊙ Teorema di Sylvester
- ⊙ coniche.

—————

Lunedì:

Esercizio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & -1 & 4 \\ -4 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, B, D ?

Sol.:

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -2 & 2 & 0 \\ 4 & x-2 & 1 & -4 \\ 4 & 0 & x-1 & -4 \\ 2 & -2 & 2 & x-3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x-1 & -2 & 2 & 0 \\ 4 & x-2 & 1 & -4 \\ 4 & 0 & x-1 & -4 \\ -x+3 & 0 & 0 & x-3 \end{pmatrix}$$
$$= \det \begin{pmatrix} x-1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & x-2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & x-1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & x-3 \end{pmatrix} = (x-1)^2 (x-2) (x-3).$$

$$V_1(A) = \ker(1I - A) = \ker \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & -4 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} =$$
$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow m_{j_A}(1) = 2 = m_{q_A}(1)$$

$$1 \leq m_{j_A}(2) \leq m_{q_A}(2) = 1 \Rightarrow m_{j_A}(2) = m_{q_A}(2) = 1$$

$$1 \leq m_{j_A}(3) \leq m_{q_A}(3) = 1 \Rightarrow m_{j_A}(3) = m_{q_A}(3) = 1$$

$\Rightarrow A$ è diag. su $\mathbb{R}$.

cerchiamo B e D

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & -1 & 4 \\ -4 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$V_2(A) = \ker \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & -4 \\ 4 & 0 & 1 & -4 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & -7 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_3(A) = \ker \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & -4 \\ 4 & 0 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & -4 \\ 4 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -4 \\ 0 & 4 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \text{diag}(1, 1, 2, 3)$$

Matrici di rango uno

$A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ ha rango 1 se e solo se $\text{Col } A = \langle v \rangle$
dove $v \neq 0_{\mathbb{R}^m}$.

$$A = (w_1 v \mid w_2 v \mid \dots \mid w_n v) = v w^t \quad \text{con } w \neq 0_{\mathbb{R}^n}.$$

$$A = v w^t, \quad A^t = w v^t$$

$$\begin{aligned} \text{Col } A = \langle v \rangle, \quad \text{Ker } A &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid v w^t x = 0_{\mathbb{R}^m} \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (w \cdot x) v = 0_{\mathbb{R}^m} \} \\ &\stackrel{v \neq 0_{\mathbb{R}^m}}{=} \{ x \in \mathbb{R}^n \mid w \cdot x = 0 \} = \langle w \rangle^\perp \end{aligned}$$

$$A v = v w^t v = (w \cdot v) v$$

$$Sp(A) = \{ w \cdot v, 0 \} = \begin{cases} \{ 0 \} & \text{se } w \cdot v = 0 \\ \{ w \cdot v, 0 \} & \text{se } w \cdot v \neq 0 \end{cases}$$

$$\dim V_0(A) = \dim \text{Ker } A = n-1 = \text{mg}_A(0)$$

$$\text{mg}_A(0) = \begin{cases} n & \text{se } w \cdot v = 0 \\ n-1 & \text{se } w \cdot v \neq 0 \end{cases}$$

A è diag. su $\mathbb{R} \triangleleft \mathbb{D}$ $w \cdot v \neq 0$

In questo caso, $\text{Col } A = V_{w \cdot v}(A)$ e $\text{Ker } A = V_0(A) = \langle w \rangle^\perp$.

Autovalori di una matrice reale

$$A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}). \quad \text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \subset \mathbb{C}$$

$$P_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0$$

$$= (x - \lambda_1)^{m_1} \dots (x - \lambda_k)^{m_k}$$

$$= x^n - \left(\underbrace{\lambda_1 + \dots + \lambda_1}_{m_1} + \underbrace{\lambda_2 + \dots + \lambda_2}_{m_2} + \dots + \underbrace{\lambda_k + \dots + \lambda_k}_{m_k} \right) x^{n-1} + \dots + (-1)^n \underbrace{\lambda_1 \dots \lambda_1}_{m_1} \underbrace{\lambda_2 \dots \lambda_2}_{m_2} \dots \underbrace{\lambda_k \dots \lambda_k}_{m_k}$$

$$a_{n-1} = \text{Tr} A, \quad a_0 = (-1)^n \det A$$

$$\Rightarrow \text{Tr} A = m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 + \dots + m_k \lambda_k$$

$$\det A = \lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} \dots \lambda_k^{m_k}$$

di A

"Le Tracce è la somma degli autovalori di A
contati con la loro moltiplicità algebrica"

"Il determinante di A è il prodotto degli
autovalori di A contati con la loro
moltiplicità algebrica"

Es: Sia $A \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ t.c.

$$\det A > 0 \quad \text{e} \quad \text{Tr} A > 0 \Rightarrow \text{Sp} A = \{\lambda_1, \lambda_2\}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0$$

In particolare $\sum \lambda_i \in \mathbb{R}$ e $\prod \lambda_i \in \mathbb{R}$.

Lemma: $\boxed{\lambda \in S_p(A) \iff \bar{\lambda} \in S_p(A)}$

dim:

$$P_A(\lambda) = 0 = \overline{0} = \overline{P_A(\lambda)} = \overline{\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0}$$

$$\stackrel{\text{A}}{=} (\bar{\lambda})^n + \overline{a_{n-1}} (\bar{\lambda})^{n-1} + \dots + \overline{a_1} \bar{\lambda} + \overline{a_0} =$$

$$\stackrel{\text{P}}{=} (\bar{\lambda})^n + a_{n-1} (\bar{\lambda})^{n-1} + \dots + a_1 \bar{\lambda} + a_0 = P_A(\bar{\lambda})$$

$$\overline{a_i} = a_i$$

Oss: Se n è dispari, A ha un autovalore reale.

Il Teorema di Cayley-Hamilton

Sia $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Allora $P_A(A) = 0_{n \times n}$

dim (omema)

$$\underline{\text{Es:}} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad P_A(x) = x^2 - 6x + 5$$

$$P_A(A) = A^2 - 6A + 5\mathbb{1}_2$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 18 \\ 6 & 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 18 \\ 6 & 19 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & -18 \\ -6 & -19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3° modo per il calcolo dell'inverso:

$$\det A \neq 0 \quad P_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + \det A$$

$$P_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + (-1)^n \det A \mathbb{1}_n = 0_{n \times n}$$

$$\Rightarrow A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A = (-1)^{n+1} \det A \mathbb{1}_n$$

$$\Rightarrow A(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_1\mathbb{1}_n) = (-1)^{n+1} \det A \mathbb{1}_n$$

$$\Rightarrow \boxed{A^{-1} = \frac{1}{(-1)^{n+1} \det A} (A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_1\mathbb{1}_n)}$$

$$\underline{\text{Es:}} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad P_A(x) = x^2 - 6x + 5$$

$$P_A(A) = A^2 - 6A + 5\mathbb{1}_2 = 0_{2 \times 2}$$

$$A(A - 6\mathbb{1}_2) = -5\mathbb{1}_2 \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{5} (A - 6\mathbb{1}_2)$$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= -\frac{1}{5} \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \right) = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Spazi euclidei

1) Prodotti scalari e prodotti hermitiani

Def: Sia V uno spazio vettoriale reale. Un prodotto scalare su V è una forma

$$S: V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{t.c.}$$

1) S è bilineare, ovvero

$$1a) S(\alpha v_1 + \beta v_2, v_3) = \alpha S(v_1, v_3) + \beta S(v_2, v_3) \quad \forall v_i \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$1b) S(v_1, \alpha v_2 + \beta v_3) = \alpha S(v_1, v_2) + \beta S(v_1, v_3) \quad \forall v_i, v_j, v_k \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

2) S è simmetrico, ovvero

$$S(v_1, v_2) = S(v_2, v_1) \quad \forall v_1, v_2 \in V.$$

3) S è definita-positiva; ovvero

$$S(v, v) > 0 \quad \forall v \in V \setminus \{0_V\}.$$

4) S è non-degenera, ovvero

$$S(v, w) = 0 \quad \forall w \iff v = 0_V.$$

La coppia (V, S) si chiama uno spazio euclideo.

Es1: $V = \mathbb{R}^n$. Il prodotto scalare standard

o prodotto punto su $\mathbb{R}^n$ è

$$X \cdot Y := X^t Y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Es2: $V = \mathcal{V}_0^2$, $u \cdot w = |u| |w| \cos \widehat{u, w}$.

Es3: $V = \mathcal{V}_0^3$, $u \cdot w = |u| |w| \cos \widehat{u, w}$.

Es4: $V = \mathbb{R}[x]_{\leq n}$, $\forall x_0, x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ distinti:

$$S(p, q) := p(x_0)q(x_0) + p(x_1)q(x_1) + \dots + p(x_m)q(x_m).$$

$$(S(p, p) = p(x_0)^2 + \dots + p(x_m)^2 = 0 \iff p = 0)$$

$$p(x_0) = \dots = p(x_m) = 0 \implies p = 0_{\mathbb{R}[x]_{\leq n}} \quad \left(\begin{array}{c} x_i \neq x_j \\ \text{per } i \neq j \end{array} \right)$$

Es5: $V = \mathcal{C}^\infty([- \pi, \pi], \mathbb{R})$

$$(f|g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$$

Prodotti hermitiani

Def: Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$.

Una forma hermitiana su V è una forma

$$h: V \times V \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{t.c.}$$

1) h è sesquilineare, ovvero

1a) h è lineare nella prima variabile

1b) h è antilineare nella seconda variabile:

$$h(v_1, \lambda v_2) = \overline{\lambda} h(v_1, v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V, \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

$$h(v_1, v_2 + v_3) = h(v_1, v_2) + h(v_1, v_3). \quad \forall v_1, v_2, v_3 \in V$$

2) h è simmetrica

3) h è definita-positiva, ovvero

$$h(v, v) \in \mathbb{R}, \quad h(v, v) > 0 \quad \forall v \neq 0_v.$$

4) h è non-degenera.

(V, h) si chiama uno spazio hermitiano.

Es (unico): $V = \mathbb{C}^n$. Il prodotto hermitiano standard su $\mathbb{C}^n$ è

$$h(z, w) := z \cdot \bar{w} = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 + \dots + z_n \bar{w}_n$$

$$h(z, z) = z_1 \bar{z}_1 + \dots + z_n \bar{z}_n = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 \geq 0$$

$$h\left(\begin{pmatrix} 1+i \\ 2-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+i \\ 2-i \end{pmatrix}\right) = 2+5=7$$

ad esempio

$$\begin{aligned} h\left(\begin{pmatrix} 1+i \\ 2-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2+i \\ 3+i \end{pmatrix}\right) &= (1+i)(2-i) + (2-i)(3-i) \\ &= (2-i)(1+i+3-i) = (2-i)4 \\ &= 8-4i \end{aligned}$$

Facciamo la Teoria degli spazi euclidei.

Per semplicità consideriamo solo

il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$

ma la Teoria vale per ogni

spazio euclideo finitamente generato.

Geometria dello spazio euclideo standard $(\mathbb{R}^n, \cdot)$

La Teoria di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ è enclouge a quella
vista per $(\mathbb{R}^2, \cdot)$.

① La norma: Poiché $X \cdot X \geq 0$, definiamo

$$\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : X \mapsto \sqrt{X \cdot X}$$

$$\|X\| := \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

E:

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1+4+1+9} = \sqrt{15}$$

Proprietà: • $\|X\| \geq 0 \quad \forall X \in \mathbb{R}^n$

• $\|X\| = 0 \iff X = 0_{\mathbb{R}^n}$

• $\|\lambda X\| = |\lambda| \|X\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

• $\|X+Y\|^2 = \|X\|^2 + 2X \cdot Y + \|Y\|^2$

Def: Un versore è un vettore di norma 1.

Oss: Se $X \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ allora $\frac{X}{\|X\|}$ e $-\frac{X}{\|X\|}$ sono
versori che si dicono i

versori diretti dello sbo $\tau = \langle X \rangle$.

Teorema (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)
 $-\|X\|\|Y\| \leq X \cdot Y \leq \|X\|\|Y\| \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$

dim:

$$0 \leq (\alpha X + \beta Y) \cdot (\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 \|X\|^2 + 2\alpha\beta X \cdot Y + \beta^2 \|Y\|^2$$

Poniamo $\alpha = \|Y\|^2$, $\beta = -X \cdot Y$

$$\|Y\|^4 \|X\|^2 - 2\|Y\|^2 (X \cdot Y)^2 + (X \cdot Y)^2 \|Y\|^2$$

$$= \|Y\|^4 \|X\|^2 - \|Y\|^2 (X \cdot Y)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \|Y\|^4 \|X\|^2 \geq \|Y\|^2 (X \cdot Y)^2$$

$$\Rightarrow (\|Y\| \|X\|)^2 \geq (X \cdot Y)^2 \quad \square$$

Oss: La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz dice che

$$x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}$$

$$\forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare con tecniche analitiche è difficile, invece usando il formalismo del prodotto scalare è molto più facile.

Oss: In $\mathbb{R}^2$ $v \cdot w = |v||w| \cos \widehat{vw}$

$$-|v||w| \leq v \cdot w \leq |v||w|$$

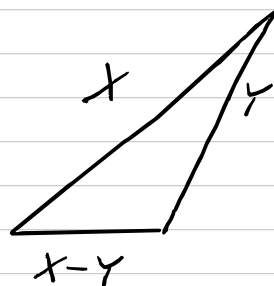
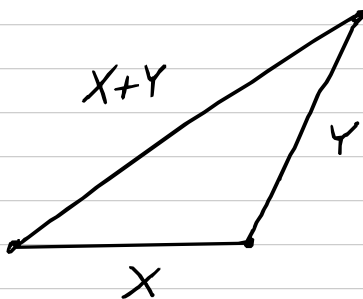
perché $-1 \leq \cos \widehat{vw} \leq 1$,

cor: (disuguaglianza Triangolare)

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

dim:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2 \underset{\text{SS}}{\leq} (\|x\| + \|y\|)^2. \quad \square$$



② Angoli

cor: $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$

$$-1 \leq \frac{X \cdot Y}{\|X\| \|Y\|} \leq 1$$

Def: Dati $X, Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ l'angolo $\widehat{XY}$ è dato da

$$\cos \widehat{XY} = \frac{X \cdot Y}{\|X\| \|Y\|}$$

Es: Calcolare il coseno di $\widehat{XY}$:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\cos \widehat{XY} = \frac{X \cdot Y}{\|X\| \|Y\|} = \frac{2+2-1+3}{\sqrt{1+4+1+1} \sqrt{4+1+1+9}} = \frac{6}{\sqrt{7} \sqrt{15}}$$

③ ortogonalità

Def: $X, Y \in \mathbb{R}^n$ si dicono ortogonali se
 $X \cdot Y = 0$.

Notazione: $X \perp Y$ se $X \cdot Y = 0$

E:
$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad X \perp Y.$$

Def: Un insieme $\mathcal{F} = (F_1, \dots, F_K) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$
di vettori non-nulli si dice ORTOGONALE
se $F_i \cdot F_j = 0 \quad \forall i \neq j$.

Prop: Un insieme ortogonale è lin. Ind.

dim: Sia $\mathcal{F} = (F_1, \dots, F_K)$ un insieme ortogonale.

$$x_1 F_1 + \dots + x_K F_K = 0_{\mathbb{R}^n} \quad \forall i \neq j$$

$$\forall i = 1, \dots, K,$$

$$F_i \cdot F_j = 0$$

$$0 = F_i \cdot 0_{\mathbb{R}^n} = F_i \cdot (x_1 F_1 + \dots + x_i F_i + \dots + x_K F_K) \stackrel{\downarrow}{=}$$

$$= x_i F_i \cdot F_i \quad \Rightarrow \quad x_i = 0$$

$F_i \neq 0_{\mathbb{R}^n}$

□

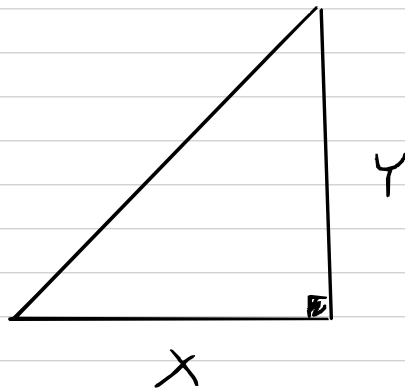
Teorema di Pitagora

Se $X \perp Y$ allora $\|X+Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2$.

dim:

$$\|X+Y\|^2 = \|X\|^2 + 2X \cdot Y + \|Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2.$$

□



Def: Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un s.p.v. vet., Una base ortonormale di U è una base di U che è ortogonale ed è composto da versori.

E₁: $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ è una base ^{ortonormale} ~~ortogonale~~ di V $(\mathbb{R}^n, \cdot)$

E₂: $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ è una base ort. di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$.

$\Rightarrow \mathcal{E} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ è una base ortonormale di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$

E₃: $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ è una base ortogonale

di $(\mathbb{R}^3, \cdot)$. Per ottenere una base ortonormale basta dividere per la norma

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Perché sono utili le basi ortogonali e ortonormali?

• Coefficienti di Fourier

Prop.:

Sia $\mathcal{F} = (F_1, \dots, F_k)$ una base ortogonale di $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora $\forall X \in U$

$$X = \frac{X \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} v_1 + \frac{X \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} v_2 + \dots + \frac{X \cdot F_k}{F_k \cdot F_k} v_k$$

dim.:

$$X = y_1 F_1 + \dots + y_k F_k$$

$$\Rightarrow X \cdot F_i = y_i F_i \cdot F_i \Rightarrow y_i = \frac{X \cdot F_i}{F_i \cdot F_i}$$

[11]

$$\underline{\text{Es.}}: \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ Trovare } F_{\mathcal{B}} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right).$$

Sol.:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Prop

$$= \frac{13}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{(-1)}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow F_{\mathcal{B}} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 13/5 \\ -1/5 \end{pmatrix} \quad \square$$

E: $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ e tale $B = (v_1, v_2, v_3)$.

Calcolare B^{-1} .

Sol.: Poiché B è ortogonale, sappiamo calcolare $F_B(e_i) = (B^{-1})^i \quad \forall i=1, \dots, 3$ con i coefficienti di Fourier:

$$\begin{aligned} 1 \quad e_1 &= \frac{e_1 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \frac{e_1 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 + \frac{e_1 \cdot v_3}{v_3 \cdot v_3} v_3 = \\ &= \frac{1}{14} v_1 + \frac{1}{3} v_2 + \frac{5}{42} v_3 \end{aligned}$$

$$e_2 = \frac{2}{14} v_1 + \frac{1}{3} v_2 - \frac{4}{42} v_3$$

$$e_3 = \frac{3}{14} v_1 - \frac{1}{3} v_2 + \frac{1}{42} v_3$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/14 & 2/14 & 3/14 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 5/42 & -4/42 & 1/42 \end{pmatrix}$$

Notiamo che

$$B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrici ortogonali

Sia $B = (v_1, \dots, v_m)$ una base ortogonale di $(\mathbb{R}^m, \cdot)$.

Sia $B = (v_1 \dots v_m) \in \text{Mat}_{m \times m}(\mathbb{R})$. Allora

$$\begin{aligned} BB^t &= \begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & v_2 \cdot v_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & v_m \cdot v_m \end{pmatrix} = \\ &= \text{diag}(v_1 \cdot v_1, \dots, v_m \cdot v_m) \end{aligned}$$

Def: Una matrice $B \in \text{Mat}_{m \times m}(\mathbb{R})$ si dice ortogonale se le sue colonne formano una base ortonormale di $(\mathbb{R}^m, \cdot)$

Es: $B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ è ortogonale

$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ non è ortogonale.

Oss: B è ortogonale se $BB^t = \mathbb{1}_m$

ovvero se

$$B^{-1} = B^t$$