Isometrie di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$

Dati $X, Y \in \mathbb{R}^n$ la loro distanza è

$$dist(X,Y) = \|X-Y\|.$$

Una isometria di $\mathbb{R}^n$ è una funzione

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

che preserva le distanze, ovvero t.c.

$$\|f(X)-f(Y)\| = \|X-Y\| \qquad \forall X,Y \in \mathbb{R}^n.$$

Es: Dato $v \in \mathbb{R}^n$, la traslazione per v

$$t_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : X \mapsto X+v$$

è un'isometria perché

$$\|t_v(X)-t_v(Y)\| = \|X+v-(Y+v)\| = \|X-Y\| \quad \forall X,Y \in \mathbb{R}^n.$$

Prop. 1: Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'isometria che fissa l'origine, ovvero t.c. $f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n}$. Allora

1) $f(X) \cdot f(Y) = X \cdot Y \quad \forall X,Y \in \mathbb{R}^n$
2) f è lineare

dim: 1) $\forall X \in \mathbb{R}^n$,

$$\|f(X)\| = \|f(X)-0_{\mathbb{R}^n}\| = \|f(X)-f(0_{\mathbb{R}^n})\| = \|X-0_{\mathbb{R}^n}\| = \|X\|$$

In particolare, $\|f(X)+f(Y)\|^2 = \|X+Y\|^2 = \|X\|^2 + 2X\cdot Y + \|Y\|^2$

$$\|f(X)+f(Y)\|^2 = \|f(X)\|^2 + 2\, f(X)\cdot f(Y) + \|f(Y)\|^2$$

$$\Rightarrow \quad X \cdot Y = f(X) \cdot f(Y).$$

2) $\|f(x+y)-(f(x)+f(y))\|^2 =$

$\|f(x+y)\|^2 + \|f(x)+f(y)\|^2 - 2\, f(x+y)\cdot(f(x)+f(y))$

$\underset{(1)}{=} \|x+y\|^2 + \|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 + 2 f(x)\cdot f(y) +$

$- 2\, f(x+y)\cdot f(x) - 2\, f(x+y)\cdot f(y)$

$\underset{(1)}{=} \cancel{\|x\|^2} + \cancel{2x\cdot y} + \cancel{\|y\|^2} + \cancel{\|x\|^2} + \cancel{\|y\|^2} + 2 f(x)\cdot f(y)$

$- 2\,(\cancel{x}+\cancel{y})\cdot x - 2\,(x+\cancel{y})\cdot y = 0$

$\Rightarrow \quad f(x+y) = f(x)+f(y).$

$\|f(\lambda x)-\lambda f(x)\|^2 = \|f(\lambda x)\|^2 - 2\lambda\, f(\lambda x)\cdot f(x) + \|\lambda f(x)\|^2$

$\underset{(1)}{=} \|\lambda x\|^2 - 2\lambda^2 x\cdot x + \lambda^2\|x\|^2 = 0$

$\Rightarrow \quad f(\lambda x) = \lambda f(x) \qquad \blacksquare$

Esercizio: La composizione di due isometrie è un'isometria.

Prop 2: Ogni isometria di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ è la composizione di una traslazione e di un'isometria lineare.

dim: Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'isometria.

Poniamo $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $g(x) := f(x) - f(0_{\mathbb{R}^n})$.

Allora g è un'isometria, infatti

$$\|g(x) - g(y)\| = \|f(x) - f(0_{\mathbb{R}^n}) - f(y) + f(0_{\mathbb{R}^n})\|$$
$$= \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

Inoltre,

$$g(0_{\mathbb{R}^n}) = f(0_{\mathbb{R}^n}) - f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n}$$

$\underset{\text{Prop. 1}}{\Rightarrow}$ g è lineare.

$$f(x) = \left(f(x) - f(0_{\mathbb{R}^n})\right) + f(0_{\mathbb{R}^n}) = t_{f(0_{\mathbb{R}^n})}(g(x)).$$

$$\Rightarrow \boxed{f = t_{f(0_{\mathbb{R}^n})} \circ g}$$

Lemma: Le isometrie sono invertibili.

dim: Sia f un'isometria. Se $f(X)=f(Y)$ allora $0=\|f(X)-f(Y)\|=\|X-Y\| \Rightarrow X=Y$

$\Rightarrow f$ è iniettiva.

$f=t_{f(0)}\circ g$ con g lineare.

Poiché $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ è iniettiva è un isomorfismo e $t_{f(0)}$ è invertibile perché $t_{f(0)}^{-1}=t_{-f(0)}$.

$\Rightarrow f$ è invertibile perché

$f^{-1}:=g^{-1}\circ t_{f(0)}^{-1}$ è l'inversa di f. ◪

Prop. 3: $S_B:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ lineare.

S_B è un'isometria $\Leftrightarrow$ B è ortogonale

dim:

$\Rightarrow$) Per Prop. 1, $S_B(X)\cdot S_B(Y)=X\cdot Y \quad \forall X,Y$.

OSS: $\boxed{a_{ij}=e_i^t A e_j}$

$$S_B(e_i)\cdot S_B(e_j)=e_i^t B^t B\, e_j = e_i^t e_j=\begin{cases}1 & \text{se } i=j\\ 0 & \text{se } i\neq j\end{cases}$$

$\Rightarrow B^tB=\mathbb{1}_n \Leftrightarrow B$ ortogonale.

$\Leftarrow$) Se $B^tB=\mathbb{1}_n$, allora $\|S_B(X)-S_B(Y)\|^2=$

$\|S_B(X-Y)\|^2=(X-Y)^tB^tB(X-Y)=(X-Y)^t(X-Y)=\|X-Y\|^2$. ◼

Isometrie lineari $\longleftrightarrow$ matrici ortogonali

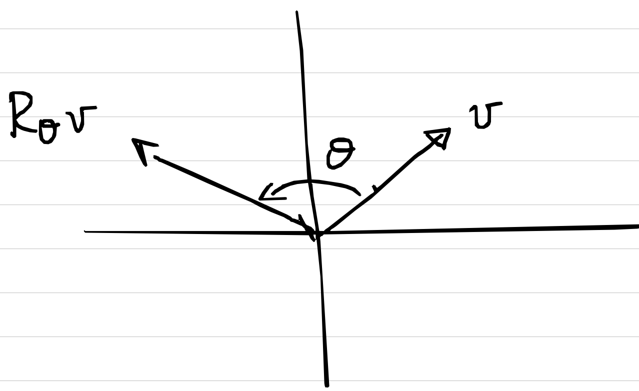
Isometrie lineari del piano

Matrici ortogonali 2×2 : $\forall \theta \in [0, 2\pi)$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \Phi_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$\det A = 1$, $\det A' = -1$.

•) $A = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$: matrice di rotazione



$$R_\theta(\bar{i}) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$R_\theta(\bar{j}) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

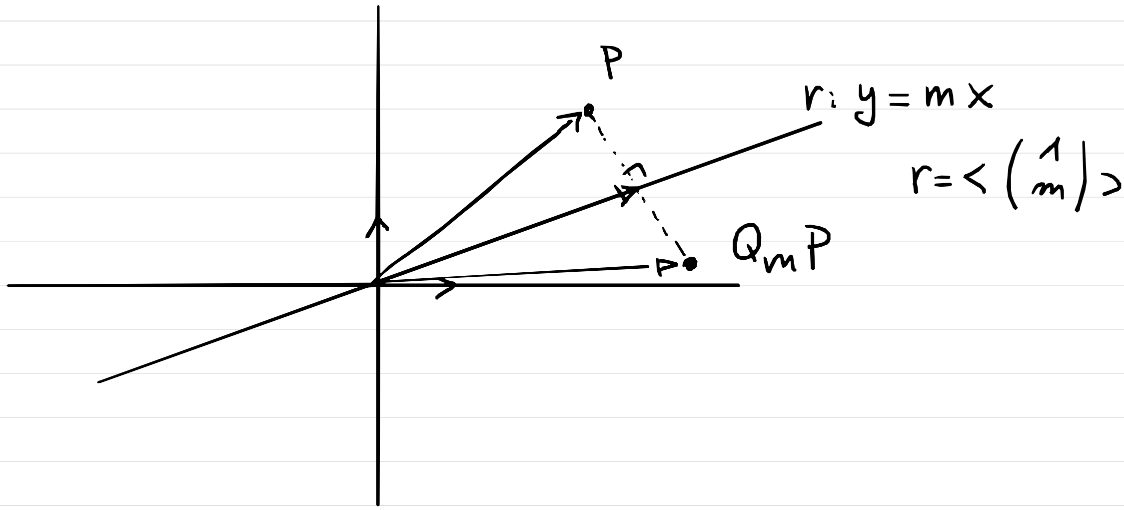
•) $\Phi_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$. Se $\theta = \pi$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Q_\infty$

Se $\theta \in [0, 2\pi)$, $\theta \neq \pi$, $\Rightarrow \cos \theta/2 \neq 0$.

$$\Rightarrow \operatorname{Tg}(\theta/2) = \frac{\sin\theta/2}{\cos\theta/2} =: m$$

$$\Rightarrow \Phi_\theta = Q_m = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$$

Interpretazione geometrica di Q_m:



$\Phi_m : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$: riflessione ortogonale attraverso la retta $y = mx$.

$$\phi_m(P) = 2\,pr_{\binom{1}{m}}(P) - P.$$

$$\phi_m(e_1) = 2\,\frac{\binom{1}{0}\cdot\binom{1}{m}}{1+m^2}\binom{1}{m} - \binom{1}{0}$$

$$= 2\,\frac{1}{1+m^2}\binom{1}{m} - \binom{1}{0} = \frac{1}{1+m^2}\binom{1-m^2}{2m}$$

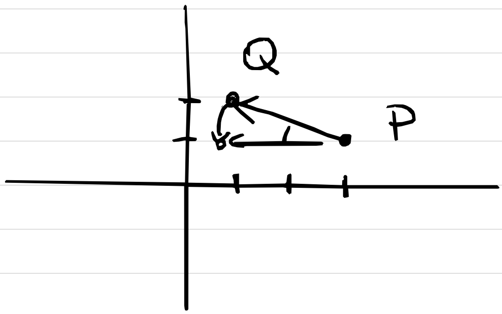
$$\phi_m(e_2) = 2\,\frac{\binom{0}{1}\cdot\binom{1}{m}}{1+m^2}\binom{1}{m} - \binom{0}{1} =$$

$$= 2\,\frac{m}{1+m^2}\binom{1}{m} - \binom{0}{1} = \frac{1}{1+m^2}\binom{2m}{m^2-1}$$

$$\rightarrow \phi_m = S_{Q_m}.$$

Es: Sia $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Trovare il punto C ottenuto ruotando Q di $30°$ in senso anti-orario attorno a $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sol.:



Il punto C è $\vec{PC} = R_{30°}(\vec{PQ})$

$$\iff C - P = R_{30°}(Q-P)$$

$$\iff \boxed{C = P + R_{30°}(Q-P)}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} - 1 \\ -2 + \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - \sqrt{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} - \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$\sqrt{3} \sim 1{,}7 \qquad \frac{5}{2} = 2{,}5 \Rightarrow \frac{5}{2} - \sqrt{3} \sim 0{,}8$

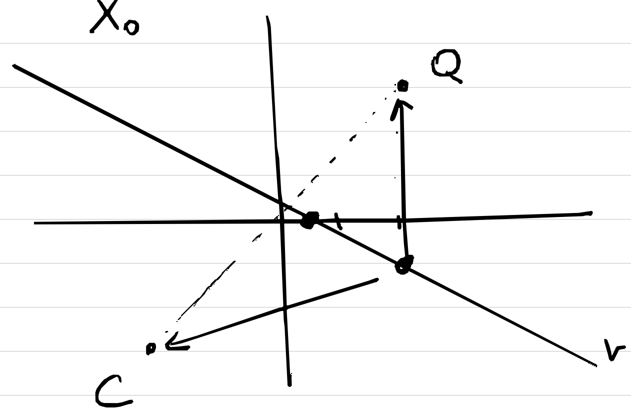
$\frac{\sqrt{3}}{2} \sim 0{,}8$

Es: Trovare il punto C ottenuto riflettendo ortogonalmente il punto $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ attraverso la retta

$$r: \ 2x + 3y = 1$$

Sol.:

$$r = \underset{X_0}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}} + \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow m = -\frac{2}{3}.$$



$$\overrightarrow{X_0 C} = Q_m\left(\overrightarrow{X_0 Q}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{C = X_0 + Q_m(Q - X_0)}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^2} \begin{pmatrix} 1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2 & 2\left(-\frac{2}{3}\right) \\ 2\left(-\frac{2}{3}\right) & \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1+\frac{4}{9}} \begin{pmatrix} 5/9 & -4/3 \\ -4/3 & -5/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ -12 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -22 \\ -33 \end{pmatrix}$$

Decomposizione ortogonale di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$

Def: Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un s.sp. vettoriale. Definiamo l'<u>ortogonale</u> di U come

$$U^\perp = \{ X \in \mathbb{R}^n \mid X \cdot u = 0 \ \forall u \in U \}$$

<u>OSS</u>: $\mathcal{B}_U = (u_1, \dots, u_K) \subset U$ base

$$\Rightarrow U^\perp = \{ X \in \mathbb{R}^n \mid X \cdot u_1 = 0, \dots, X \cdot u_K = 0 \}$$

$$: \begin{cases} u_1 \cdot X = 0 \\ \vdots \\ u_K \cdot X = 0 \end{cases}$$

<u>Teorema di decomposizione ortogonale</u>

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un s.sp. vett. Allora $U^\perp$ è un s.sp. vettoriale e

$$\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp.$$

Più precisamente, se $U = \mathrm{Col}\, A$ allora

$$\boxed{U^\perp = \mathrm{Ker}\, A^t = (\mathrm{Col}\, A)^\perp}$$

In particolare,

$$(U^\perp)^\perp = U.$$

dim: $\forall u \in U$, $\forall X, Y \in U^\perp$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha X + \beta Y)\cdot u = \alpha\, X\cdot u + \beta\, Y\cdot u = \alpha 0 + \beta 0 = 0$$

$\Rightarrow \alpha X + \beta Y \in U^\perp$. $\Rightarrow U^\perp$ è un s.sp. vettoriale.

Sia $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_r)$ una base di U e sia

$$A = (v_1 \cdots v_r) \in Mat_{m\times r}(\mathbb{R}), \quad r = rg\, A = \dim U.$$

Dimostriamo che

$$\boxed{\mathbb{R}^n = Col\, A \oplus Ker\, A^t.}$$

1) $Col\, A \cap Ker\, A^t = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

$X \in Col A \cap Ker\, A^t \Rightarrow \exists\, Y \in \mathbb{R}^r$ t.c. $X = AY$

e $A^t X = 0_{\mathbb{R}^r} \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^r} = A^t A Y$

$\Rightarrow 0 = Y^t A^t A Y = (AY)\cdot(AY)$

$\Rightarrow X = AY = 0_{\mathbb{R}^n}$

2) $\dim Col A + \dim Ker\, A^t = m$.

Ricordiamo che $rg\, A = rg\, A^t = n - \dim Ker\, A^t$

$\Rightarrow m = \dim Col A + \dim Ker\, A^t$

$\dim(Col\, A + Ker\, A^t) = \dim Col A + \dim Ker\, A^t - \dim(Col A \cap Ker\, A^t)$

$= rg\, A + \dim Ker\, A^t - 0$

$= rg\, A + \dim Ker\, A = m$

3) $\operatorname{Ker} A^t = (\operatorname{Col} A)^\perp$.

Sia $X \in \operatorname{Ker} A^t$ e $Y \in \operatorname{Col} A$ allora $Y = AZ$ e

$$X \cdot Y = X \cdot AZ = X^t(AZ) = (X^t A) Z =$$

$$= (A^t X)^t Z = 0_{\mathbb{R}^k}^t Z = 0$$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} A^t \subseteq (\operatorname{Col} A)^\perp$.

Viceversa, se $X \in (\operatorname{Col} A)^\perp$ allora $\forall Y \in \mathbb{R}^r$

$$0 = X \cdot AY = X^t AY = (X^t AY)^t = Y^t A^t X$$

$\Rightarrow A^t X \cdot Y = 0 \quad \forall Y \in \mathbb{R}^r \Rightarrow A^t X = 0_{\mathbb{R}^r}$

$\Rightarrow X \in \operatorname{Ker} A^t$.

4) $U \subseteq (U^\perp)^\perp$. Infatti, $\forall u \in U \quad \forall u' \in U^\perp$

$u \cdot u' = 0$ e quindi $u \in (U^\perp)^\perp$.

5) $U = (U^\perp)^\perp$. Poiché $\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$ per ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, allora $\mathbb{R}^n = U^\perp \oplus (U^\perp)^\perp$

$\Rightarrow \dim (U^\perp)^\perp = n - \dim U^\perp = \dim U$.

Poiché, per (4), $U \subseteq (U^\perp)^\perp$, concludiamo che $U = (U^\perp)^\perp$. ∎

NB: In spazi euclidei infinito-dimensionali 5) non è vero, ma il resto sì!

2° modo per trovare eq. cartesiane di U

$U = \langle v_1, \dots, v_r \rangle$: eq. parametriche.

$A = (v_1 | \dots | v_r) \in Mat_{m \times r}(\mathbb{R}) \quad rg\, A = r$

Sia $(w_1, \dots, w_{m-r})$ una base di $\operatorname{Ker} A^t$. Allora

$$U = (\operatorname{Ker} A^t)^\perp : \begin{cases} w_1 \cdot x = 0 \\ w_2 \cdot x = 0 \\ \vdots \\ w_{m-r} \cdot x = 0 \end{cases}$$

Es: $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad A^t = (1\ 2\ 3)$

$\operatorname{Ker} A^t = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow U : \begin{cases} -2x + y = 0 \\ -3x + z = 0 \end{cases}$

Es: $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Trovare una base di $U^\perp$!

Sol:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad U^\perp = \operatorname{Ker} A^t = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Teorema

$= \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -8 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 8/5 \end{pmatrix}$

$= \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/5 \\ 0 & 1 & 8/5 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$.

$\Rightarrow U \underset{!!}{=} (U^\perp)^\perp : x - 8y + 5z = 0$

④ La proiezione ortogonale

Def: Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale. La proiezione ortogonale su U è la proiezione su U lungo $U^\perp$ e si denota

$$pr_U : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$u + u' \longmapsto u$$

dove $u' \in U^\perp$, $u \in U$.

OSS 1: $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $X = pr_U(x) + (X - pr_U(x))$ con $X - pr_U(x) \in U^\perp$, quindi

$$u \cdot (X - pr_U(x)) = 0 \quad \forall u \in U.$$

OSS 2: Se $v = u + u'$, $u \in U$, $u' \in U^\perp$ allora

$$v \cdot u' = (u + u') \cdot u' = u' \cdot u' \geq 0 \quad \text{e}$$

$$v \cdot u' = 0 \iff u' = 0_{\mathbb{R}^n} \iff v \in U.$$

Denotiamo con P_U la matrice $n \times n$ t.c.

$$pr_U = S_{P_U}$$

e la chiamiamo matrice di proiezione ortogonale.

Com'è fatta P_U ?

Lemma: Sia $A \in Mat_{m \times k}(\mathbb{R})$. Allora

1) $\operatorname{Ker} A^t A = \operatorname{Ker} A$

2) $\operatorname{rg} A^t A = \operatorname{rg} A$

In particolare, se $\operatorname{rg} A = k$ allora $A^t A$ è invertibile.

dim: $\underset{k \times m}{A^t} \underset{n \times k}{A}$ è $k \times k$.

$S_A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m \qquad S_{A^t} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$

Sia $X \in \operatorname{Ker} A^t A$. Allora $A^t A X = 0_{\mathbb{R}^k}$

$\Rightarrow 0 = X^t (A^t A X) = X^t A^t A X = (AX)^t AX = AX \cdot AX$

$\Rightarrow AX = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \operatorname{Ker} A^t A \subseteq \operatorname{Ker} A$.

Viceversa, se $AX = 0_{\mathbb{R}^m} \Rightarrow A^t A X = 0_{\mathbb{R}^k} \Rightarrow \operatorname{Ker} A \subseteq \operatorname{Ker} A^t A$.

$\operatorname{rg} A^t A = k - \dim \operatorname{Ker} A^t A = k - \dim \operatorname{Ker} A = \operatorname{rg} A$. ∎

<u>Teorema</u>: Sia $\mathcal{B}_U = (v_1, \dots, v_r)$ una base di U e $A = (v_1 | \cdots | v_r)$. Allora

$$\boxed{P_U = A(A^t A)^{-1} A^t}$$

<u>dim</u>: $\forall X \in \mathbb{R}^m$, $pr_U(X) = y_1 v_1 + \dots + y_r v_r = AY$.

$$X - pr_U(X) \in U^{\perp} = \operatorname{Ker} A^t$$

$$\Rightarrow \underset{r \times m}{A^t} \underset{m \times 1}{(X - AY)} = 0_{\mathbb{R}^r}$$

$$\Rightarrow A^t X - A^t A Y = 0_{\mathbb{R}^r}$$

$$\Rightarrow A^t X = A^t A Y$$

$$\underset{\text{Lemma}}{\Rightarrow} Y = (A^t A)^{-1} A^t X$$

$$\Rightarrow pr_U(X) = P_U X = A(A^t A)^{-1} A^t X \qquad \forall X \in \mathbb{R}^m.$$

$\square$

Es: $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3$.

Calcolare P_U.

Sol.:

$$P_U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \left((1\,1\,1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} (1\,1\,1)$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1\,1\,1) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Proprietà di P_U

1) $P_U = P_U^t$. Infatti

$$(P_U)_i^j = e_i \cdot P_U e_j = e_i^t P_U e_j$$

$e_i = u_i + u_i'$ $\quad e_j = u_j + u_j'$ $\quad$ con $u_i, u_j \in U$, $u_i', u_j' \in U^\perp$

$$(P_U)_i^j = e_i \cdot u_j' = (u_i + u_i') \cdot u_j' = u_i' \cdot u_j'$$

$$= u_i' \cdot (u_j + u_j') = u_i' \cdot e_j = (P_U e_i) \cdot e_j$$

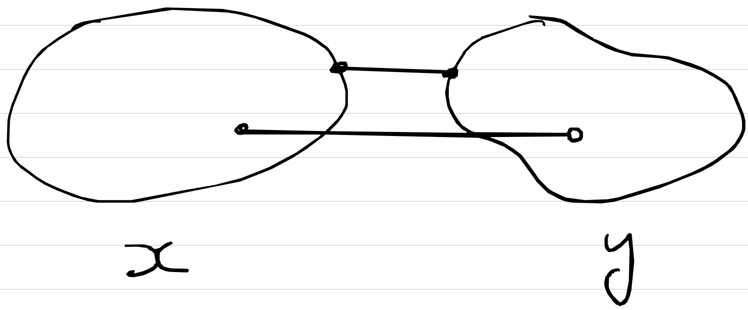
$$= (P_U e_i)^t e_j = e_i^t (P_U)^t e_j = (P_U^t)_i^j$$

2) $P_U^2 = P_U$.

NB: Se $P \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$ t.c. $P = P^t$ e $P^2 = P$ allora $P = P_U$ dove $U = Col\, P$

Distanze: Dati $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^n$ definiamo

$$\mathrm{dist}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \min \{ \|X - Y\| \mid \forall X \in \mathcal{X}, \forall Y \in \mathcal{Y} \}$$



OSS: dist è invariante per traslazioni.

$$\mathrm{dist}(\mathcal{X} + v, \mathcal{Y} + v) = \mathrm{dist}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}).$$

Teorema: Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottosp. vett. e $Q \in \mathbb{R}^n$

$$\mathrm{dist}(Q, U) = \| Q - pr_U(Q) \|$$

dim: $\forall u \in U$

$$\|Q - u\|^2 = \| \overbrace{Q - pr_U(Q)}^{\in U^\perp} + \overbrace{pr_U(Q) - u}^{\in U} \|^2$$

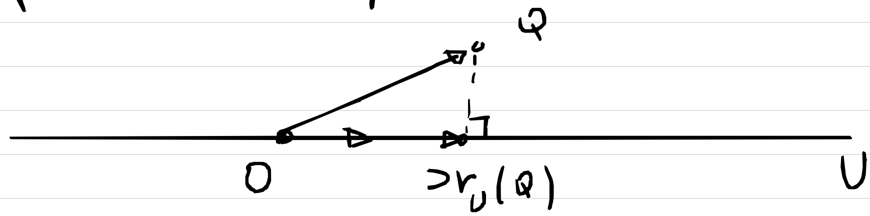
$$= \|Q - pr_U(Q)\|^2 + \| pr_U(Q) - u \|^2$$

Pitagora

$$\geq \|Q - pr_U(Q)\|^2$$

$=$ se e solo se $u = pr_U(Q)$. $\boxtimes$

La proiezione ortogonale di Q su U è il punto di U più vicino a Q



Esercizio (Feb 24/25):

$$U: \begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1+3x_2-x_3+2x_4=0 \end{cases} \qquad Q=\begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix}$$

Calcolare dist(P,U).

Sol.: dist$(Q,U) = \|Q-P_UQ\|$.
Troviamo una base di U, calcoliamo P_U e poi P_UQ.

① $U = \text{Ker}\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\1&3&-1&2\end{pmatrix} = \text{Ker}\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix} = \text{Ker}\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&0&1\end{pmatrix}$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle. \qquad A=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

$$P_U = A(A^tA)^{-1}A^t =$$

$$= \begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_U Q = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{dist}(Q, U) = \| Q - P_U Q \| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = 2\sqrt{2}.$$