

Es: $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3.$

Calcolare P_U .

Sol:

$$\begin{aligned} P_U &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \left((1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} (1 \ 1 \ 1) \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 1 \ 1) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

Proprietà di P_U

1) $P_U = P_U^t$. Infatti:

$$(P_U)_i^j = e_i \cdot P_U e_j = e_i^t P_U e_j$$

$$e_i = u_i + u_i' \quad e_j = u_j + u_j' \quad \text{con } u_i, u_j \in U, u_i', u_j' \in U^\perp$$

$$(P_U)_i^j = e_i \cdot u_j' = (u_i + u_i') \cdot u_j' = u_i' \cdot u_j'$$

$$= u_i' \cdot (u_j + u_j') = u_i' \cdot e_j = (P_U e_i) \cdot e_j$$

$$= (P_U e_i)^t e_j = e_i^t (P_U)^t e_j = (P_U^t)_i^j$$

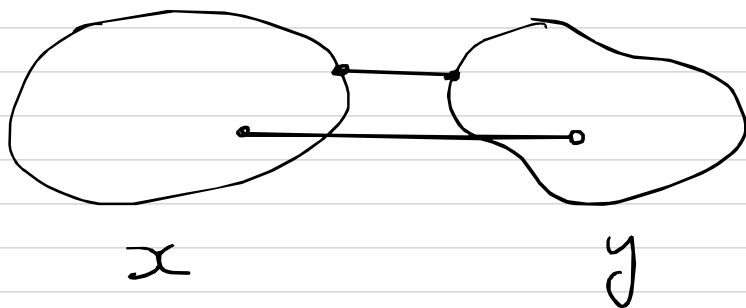
2) $P_U^2 = P_U$.

NB: Se $P \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ t.c. $P = P^t$ e $P^2 = P$ allora

$$P = P_U \quad \text{dove } U = \text{Col } P$$

Distanza: Dati $x, y \subseteq \mathbb{R}^n$ definiamo

$$\text{dist}(x, y) = \min \{ \|x - y\| \mid \forall x \in x, \forall y \in y \}$$



oss: dist è invariante per traslazioni.

$$\text{dist}(x+v, y+v) = \text{dist}(x, y).$$

Teorema: Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un s.p.v. e $Q \in \mathbb{R}^n$

$$\text{dist}(Q, U) = \|Q - \text{pr}_U(Q)\|$$

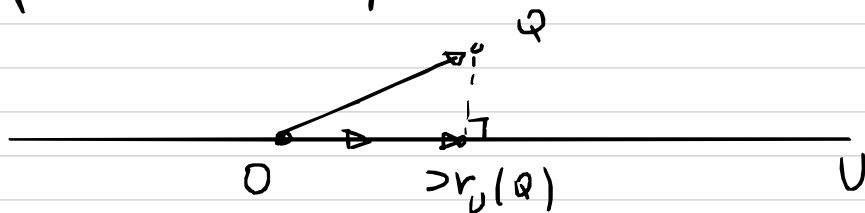
dim: $\forall u \in U$

$$\|Q - u\|^2 = \|\overbrace{Q - \text{pr}_U(Q)}^{U^\perp} + \overbrace{\text{pr}_U(Q) - u}^U\|^2$$

$$\begin{aligned} &= \|Q - \text{pr}_U(Q)\|^2 + \|\text{pr}_U(Q) - u\|^2 \\ &\quad \nearrow \text{Pitagora} \\ &\geq \|Q - \text{pr}_U(Q)\|^2 \end{aligned}$$

$$= x \text{ e solo } x \text{ } u = \text{pr}_U(Q). \quad \square$$

La proiezione ortogonale di Q su U
 è il punto di U più vicino a Q



Esercizio (Feb 24/25):

$$U: \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calcolare $\text{dist}(P, U)$.

Sol: $\text{dist}(Q, U) = \|Q - P_U Q\|$.

Troviamo una base di U , calcoliamo P_U e
 poi $P_U Q$.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} U &= \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$P_U = A(A^t A)^{-1} A^t =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_U Q = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{dist}(Q, U) = \|Q - P_U Q\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = 2\sqrt{2}.$$

Proiezione ortogonale e coefficienti di Fourier

Teorema: Sia $\mathcal{F}_U = (F_1, \dots, F_r)$ una base
ortogonale di $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Allora $\forall x \in \mathbb{R}^m$

$$\text{pr}_U(x) = \frac{x \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 + \frac{x \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 + \dots + \frac{x \cdot F_r}{F_r \cdot F_r} F_r$$

dim:

$\forall x \in \mathbb{R}^m \exists! u \in U \exists! u' \in U^\perp$ t.c. $x = u + u'$
($u = \text{pr}_U(x)$, $u' = \text{pr}_{U^\perp}(x)$). Siano $y_1, \dots, y_r \in \mathbb{R}$ t.c.

$u = y_1 F_1 + \dots + y_r F_r$. Allora, $\forall i = 1, \dots, r$,

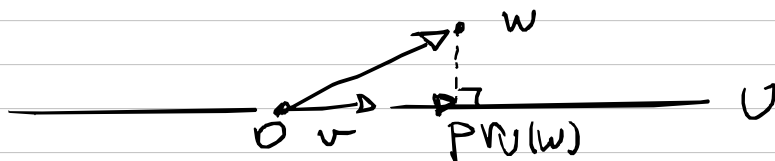
$$x \cdot F_i = (u + u') \cdot F_i \stackrel{u' \in U^\perp}{=} u \cdot F_i = (y_1 F_1 + \dots + y_r F_r) \cdot F_i$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ F_i \cdot F_j = 0 \ \forall i \neq j}}{=} y_i F_i \cdot F_i \Rightarrow \boxed{y_i = \frac{x \cdot F_i}{F_i \cdot F_i}}$$

□

Es: Se $U = \langle v \rangle$ $\dim U = 1$, $\forall w \in \mathbb{R}^m$

$$\boxed{\text{pr}_U(w) = \text{pr}_v(w) = \frac{w \cdot v}{v \cdot v} v}$$



Esercizio: $U: \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Calcolare $\text{dist}(P, U)$.

Sol: Una base ortogonale di U è

$\left(F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$. Per il Teorema

$$\text{pr}_U(Q) = \frac{Q \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 + \frac{Q \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2$$

$$= \frac{4}{2} F_1 + 0 F_2 = 2 F_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Esercizio: Calcolare la distanza di $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ della retta

$$r: \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Sol:

$$r = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \langle v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle. \quad \text{dist}(Q, r) = \left\| Q - \frac{Q \cdot v}{v \cdot v} v \right\|$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{10}.$$

⑤ Algoritmo di Gram-Schmidt

Teorema (Algoritmo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt)

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale. Sia $B_U = (v_1, \dots, v_r)$ una base di U . Allora esiste un'unica base $E_U = (E_1, \dots, E_r)$ di U con le seguenti proprietà:

- 1) E_U è ortonormale
- 2) $\langle v_1, \dots, v_i \rangle = \langle E_1, \dots, E_i \rangle \quad \forall i = 1, \dots, r.$
- 3) $v_i \cdot E_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, r.$

La base E_U si trova come segue: definiamo

$$F_1 := v_1$$

$$\begin{aligned} F_{i+1} &:= v_{i+1} - \text{pr}_{\langle v_1, \dots, v_i \rangle} (v_{i+1}) \\ &= v_{i+1} - \sum_{k=1}^i \frac{v_{i+1} \cdot F_k}{F_k \cdot F_k} F_k \end{aligned}$$

Allora

$$E_i := \frac{F_i}{\|F_i\|},$$

dim :

$$F_{i+1} = v_{i+1} - \text{pr}_{\langle v_1, \dots, v_i \rangle} (v_{i+1}) \in \langle v_1, \dots, v_i \rangle^\perp$$

Quindi $F_2 \perp F_1$, $F_3 \perp \langle F_1, F_2 \rangle$, ..., $F_r \perp \langle F_1, \dots, F_{r-1} \rangle$

$\Rightarrow (F_1, \dots, F_r)$ è ortogonale.

$$F_{i+1} \in \langle \beta_U \rangle = U$$

$\Rightarrow \mathcal{F}_U = (F_1, \dots, F_r)$ è una base ortogonale di $U \Rightarrow \mathcal{E}_U$ è ortonormale.

Per il lemma di scambio, $\forall i=1, \dots, r$,

$$\langle v_1, \dots, v_i \rangle = \langle F_1, \dots, F_i \rangle = \langle E_1, \dots, E_i \rangle.$$

Inoltre

$$v_{i+1} \cdot F_{i+1} = v_{i+1} \cdot (v_{i+1} - \text{pr}_{\langle v_1, \dots, v_i \rangle} (v_{i+1})) =$$

$$= v_{i+1} \cdot \text{pr}_{\langle v_1, \dots, v_i \rangle^\perp} (v_{i+1}) =$$

$$= \text{pr}_{\langle v_1, \dots, v_i \rangle^\perp} (v_{i+1}) \cdot \text{pr}_{\langle v_1, \dots, v_i \rangle^\perp} (v_{i+1}) \geq 0$$

è uguale a zero se e solo se $v_{i+1} \in \langle v_1, \dots, v_i \rangle$

e quindi $v_{i+1} \cdot F_{i+1} = F_{i+1} \cdot F_{i+1} > 0$ $\square$

$$v_{i+1} = F_{i+1} + \sum_{j=1}^i \frac{v_{i+1} \cdot F_j}{F_j \cdot F_j} F_j$$

E: Trovare una base normale di

$$U: x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad \text{ed una base di } U^\perp.$$

Sol.

$$B_U = \left(v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Applichiamo G-S a B_U :

$$\boxed{F_1 = v_1} \leadsto E_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} v_1. \quad F_1 \cdot F_1 = 2$$
$$F_2' = v_2 - \frac{v_2 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 = v_2 - \frac{1}{2} F_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{F_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \leadsto E_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} F_2, \quad F_2 \cdot F_2 = 6.$$

$$F_3' = v_3 - \frac{v_3 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 - \frac{v_3 \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 = v_3 - \frac{1}{2} F_1 - \frac{1}{6} F_2$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{-6+3+1}{6} = -\frac{2}{6} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{-3+1}{6} = -\frac{2}{6} \\ -\frac{2}{6} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \leadsto \boxed{F_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}} \leadsto E_3 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$U^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \leadsto E_{U^\perp} = \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

NB: Se applichiamo l'algoritmo di G-S ad un insieme qualunque di vettori $(v_1, \dots, v_k)$ se esso non è lin. Ind. capita di ottenere $F_i = 0_{\mathbb{R}^n}$, in questo caso non potremo dividere per $F_i \cdot F_i$ ma potremo continuare "escludendolo".

E: Determinare una base ortogonale di $U = \langle v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

Sol.: $F_1 = v_1 \neq 0_{\mathbb{R}^4}$.

$$F_2' = v_2 - \frac{v_2 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ -1 \\ 1/3 \end{pmatrix} \leadsto F_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^4}$$

$$F_3' = v_3 - \frac{v_3 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 - \frac{v_3 \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 = 0_{\mathbb{R}^4}.$$

($\Leftrightarrow v_3 \in \langle v_1, v_2 \rangle$).

$$F_4' = v_4 - \frac{v_4 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 - \frac{v_4 \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\leadsto F_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow (F_1, F_2, F_4)$ è una base ortogonale di U .

Iperpiani e vettori normali

Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un iperpiano.

Questo vuol dire che $\dim U = n-1$

$$\Leftrightarrow \dim U^\perp = 1,$$

Def: Un vettore direttore di $U^\perp$ si chiama vettore normale ad U .

Un versore normale ad U è un vettore normale ad U di norma 1.

Sia $n \in U^\perp$ un vettore normale ad U .

$$\text{Allora } U = (U^\perp)^\perp = \langle n \rangle^\perp : n \cdot X = 0.$$

Quindi n è il vettore che ha come coordinate i coefficienti dell'equazione contenente di U .

Es: Un vettore normale ad $U: 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 + x_4 = 0$
è $n = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$

NB: In $\mathbb{R}^3$, se $\pi = \langle u, v \rangle$ è un piano allora $u \wedge v \in \pi^\perp$ ed è non-nullo.

$$\Rightarrow \pi: u \wedge v \cdot x = 0.$$

Il piano di $\mathbb{R}^3$ che ha vettori direttori $u, v \in \mathbb{R}^3$ e passa per $P \in \mathbb{R}^3$ è quindi

$$\boxed{\pi: u \wedge v \cdot x = u \wedge v \cdot P}$$

E: Trovare equazione cartesiana del piano π passante per $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e con vettori direttori $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e calcolare $\text{dist}(Q, \pi)$ con

Sol: $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$u \wedge v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\pi: x + y - 3z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 + 1 - 6 = -4$$

$$\pi: x + y - 3z = -4.$$

$$\text{dist}(Q, \pi) = \frac{|1 + 1 - 9 + 4|}{\sqrt{1 + 1 + 9}} =$$

Distanza punto-iperpiano

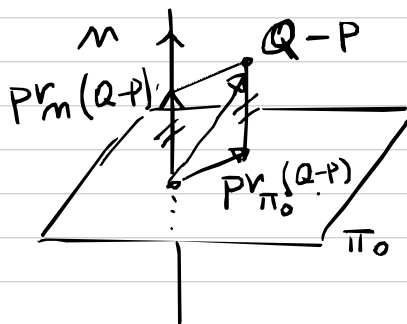
Prop.

Sia $\pi : m \cdot X = m \cdot P \subset \mathbb{R}^n$ un iperpiano.

Sia $Q \in \mathbb{R}^n$. Allora

$$\text{dist}(Q, \pi) = \frac{|m \cdot Q - m \cdot P|}{\|m\|}$$

dim :



$$\pi = P + \pi_0 \quad \text{dove} \quad \pi_0 : m \cdot X = 0.$$

$$\text{dist}(Q, \pi) = \text{dist}(Q-P, \pi_0) \quad X - \text{pr}_{\pi_0}(x) = \text{pr}_{\pi_0^\perp}(x)$$

$$= \|Q-P - \text{pr}_{\pi_0}(Q-P)\| =$$

$$= \|\text{pr}_m(Q-P)\|$$

$$= \left\| \frac{(Q-P) \cdot m}{m \cdot m} m \right\| = \frac{|(Q-P) \cdot m|}{\|m\|^2} \|m\|$$

$$= \frac{|m \cdot Q - m \cdot P|}{\|m\|}$$

□

Es: Calcolare la distanza in $(\mathbb{R}^4, \cdot)$

tra $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $\pi: 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 4$

Sol:

$$\text{dist}(Q, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 3 + 4 - 4|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

□

Es: $\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

Calcolare la distanza di $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ da π .

Sol:

$$\text{dist}(Q, \pi) = \frac{|Q \cdot u \wedge v - Q \cdot P|}{\|u \wedge v\|}$$

$$u \wedge v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\text{dist}(Q, \pi) = \frac{|1 - 4|}{\sqrt{25 + 9 + 49}} = \frac{3}{\sqrt{83}} \quad \square$$

⑥ Spettro delle matrici simmetriche e anti-simmetriche

Def: Sia $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

- A si dice simmetrica se $A = A^t$
- A si dice anti-simmetrica se $A = -A^t$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ è simmetrica

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ è anti-simmetrica.

NB: $A = -A^t \Rightarrow A_{ii} = 0$.

Prop: $\text{Sym}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid A = A^t\}$
e $\text{ASym}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid A = -A^t\}$
sono sottospazi vettoriali e

$$\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) = \text{Sym}_n(\mathbb{R}) \oplus \text{ASym}_n(\mathbb{R}).$$

dim: $(\alpha A + \beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t$.

$$\forall B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}), \quad B = \underbrace{\frac{B+B^t}{2}}_{\text{Sym}} + \underbrace{\frac{B-B^t}{2}}_{\text{ASym}}.$$

Lemma : (Formula di aggiunta)

Sia $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Allora

$$\boxed{AX \cdot Y = X \cdot A^t Y} \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$$

dim :

$$AX \cdot Y = (AX)^t Y = (X^t A^t) Y = X^t (A^t Y) = X \cdot A^t Y.$$

□

NB: Si può dimostrare che dato una forma bilineare non-degenera su $V = \mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$, $\forall A$

$\exists!$ matrice B t.c. $s(AX, Y) = s(X, BY) \quad \forall X, Y$.

B si chiama la matrice aggiunta di A rispetto ad s e si denota A^*

Il lemma dice che l'aggiunto di A (rispetto a $\cdot$) è A^t .

oss: Le matrici simmetriche sono autoaggiunte

Se $A = A^t$ allora $\boxed{AX \cdot Y = X \cdot AY.}$

NB: $h(X, Y) = X \cdot \bar{Y}$. L'aggiunto di A è $A^* = \overline{A^t}$.

Teorema: Una matrice simmetrica reale ha tutti gli autovalori reali.

dim: Sia $A = A^t \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Sia $\lambda \in \text{Sp}(A) \subset \mathbb{C}$. Dimostriamo: $\lambda = \bar{\lambda}$.

Sia $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_{\mathbb{C}^n}\}$ t.c. $AX = \lambda X$. Allora

$$AX \cdot \bar{X} = \lambda X \cdot \bar{X} = \lambda X \cdot \bar{X} = \lambda h(X, X)$$

$$\begin{aligned} AX \cdot \bar{X} &= X^t A^t \bar{X} = X^t A \bar{X} = \underset{\substack{\uparrow \\ A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})}}{X^t A \bar{X}} = X^t \overline{AX} = \\ &= X \cdot \overline{\lambda X} = \bar{\lambda} X \cdot \bar{X} = \bar{\lambda} h(X, X) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\lambda - \bar{\lambda}) h(X, X) = 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \quad \text{perché} \quad h(X, X) \neq 0$$

Esercizio: Sia $A = -A^t$. Dimostrare che $\text{Sp}(A) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

$$\underline{Es}: A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$P_A(x) = x^2 - (a+d)x + (ad-b^2)$$

$$\begin{aligned} Sp(A) &= \left\{ \frac{a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-b^2)}}{2} \right\} \\ &= \left\{ \frac{a+d \pm \sqrt{a^2+d^2+2ad-4ad+4b^2}}{2} \right\} \\ &= \left\{ \frac{a+d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}{2} \right\} \subset \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\underline{Es}: A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}, \quad b \neq 0.$$

$$P_A(x) = x^2 + b^2$$

$$Sp(A) = \{ ib, -ib \} \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

⑦ Matrici ortogonalmente diagonalizzabili

Def : Una matrice $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ si dice ortogonalmente diagonalizzabile se esiste una base ortonormale di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ composta di suoi autovettori.

Es : $A = O_{n \times n}$, $E = (e_1, \dots, e_n)$ è una base ortonormale di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ composta di suoi autovettori.

$A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $E = (e_1, \dots, e_n)$ è una base ortonormale di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ composta di autovettori per A .

Es : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\left(E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, E_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

è una base ortonormale di autovettori per A
 $(AE_1 = 2E_1, AE_2 = 0_{\mathbb{R}^2} = 0E_2)$

Teorema spettrale reale.

$A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ è ortogonalmente diagonalizzabile

$$\begin{array}{c} \updownarrow \\ A = A^t \end{array}$$

dim :

Se A è ortogonalmente diagonalizzabile, cioè $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_n)$ una base ortonormale di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ composta di autovettori per A .

Denotiamo $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gli autovalori :

$$A E_i = \lambda_i E_i.$$

Poniamo $B = (E_1 | \dots | E_n) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ e

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}).$$

Allora B è ortogonale. Quindi

$$D = B^{-1} A B \stackrel{B^{-1} = B^t}{=} B^t A B \Rightarrow A = B D B^t$$

$$\Rightarrow A^t = (B D B^t)^t = (B^t)^t D^t B^t \stackrel{D = D^t}{=} B D B^t = A$$

$\Rightarrow A$ è simmetrica.

Dimostriamo che una matrice simmetrica è ort. diag.

Sia $A = A^t \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Dimostriamo che

① A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$

② A è ortogonalmente diagonalizzabile.

Già sappiamo che $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$.

Dimostriamo che

$$\textcircled{1} \quad \mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} V_{\lambda}(A)$$

$$\textcircled{2} \quad V_{\lambda}(A) \perp V_{\mu}(A) \quad \forall \lambda \neq \mu$$

Se valgono ① e ②, basta Trovare una

basi ortogonale E_{λ} di $V_{\lambda}(A) \quad \forall \lambda \in \text{Sp}(A)$:

Una base ortogonale di autovettori sarà

$$\bigcup_{\lambda \in \text{Sp}(A)} E_{\lambda}.$$

① Dimostriamo che $m_{g_A}(\lambda) = m_{A_A}(\lambda) \quad \forall \lambda \in \text{Sp}(A)$.

Sia dunque $\lambda \in \text{Sp}(A)$. Denotiamo $W = V_{\lambda}(A)^{\perp}$

così che $\mathbb{R}^n = V_{\lambda}(A) \oplus W$. Fissiamo basi

$$\beta_{\lambda} = (v_1, \dots, v_k) \subset V_{\lambda}(A), \quad \beta_W = (w_{k+1}, \dots, w_n) \quad \text{con } k = m_{g_A}(\lambda).$$

$$\text{Sia } \beta = \beta_{\lambda} \cup \beta_W = (v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_n) \stackrel{\text{base}}{\subset} \mathbb{R}^n.$$

$$\forall w \in W, \forall v \in V_{\lambda}(A) \quad A w \cdot v = w \cdot A^t v = w \cdot A v = w \cdot \lambda v$$

$$= \lambda (w \cdot v) = 0 \quad \Rightarrow A w \in W \quad \forall w \in W. \quad \text{Quindi,}$$

la matrice associata a S_A nella base

β (in perizente ed in aniro) ha la forma

$$Z = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathbb{1}_k & 0 \\ \hline 0 & C \end{array} \right)_{n-k}$$

$$(A w_i \in \langle w_{k+1}, \dots, w_n \rangle, A w_i = C_1^i w_{k+1} + C_2^i w_{k+2} + \dots + C_{n-k}^i w_n)$$

Ponendo $B := (v_1 | \dots | v_k | w_{k+1} | \dots | w_n)$ otteniamo

$$B^{-1}AB = Z$$

e quindi

$$p_A(x) = p_Z(x) = (x-\lambda)^k p_C(x).$$

Per concludere dobbiamo dimostrare che $p_C(\lambda) \neq 0$.

In fatti, se $p_C(\lambda) = 0$ allora $\exists X \in \mathbb{R}^{n-k} \setminus \{0_{\mathbb{R}^{n-k}}\}$ t.c.

$$CX = \lambda X. \text{ Allora, posto } \tilde{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

$$Z\tilde{X} = \begin{pmatrix} \lambda \mathbb{1}_k & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ CX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda X \end{pmatrix} = \lambda \tilde{X}.$$

ovvero

$$\lambda \tilde{X} = Z\tilde{X} = B^{-1}AB\tilde{X} \Rightarrow \lambda B\tilde{X} = AB\tilde{X}$$

$$\Rightarrow B\tilde{X} \in V_\lambda(A). \text{ Ma}$$

$$B\tilde{X} = x_1 w_{k+1} + \dots + x_{n-k} w_n \in W.$$

$$\text{Quindi } B\tilde{X} \in V_\lambda(A) \cap W = \{0_{\mathbb{R}^n}\} \Rightarrow B\tilde{X} = 0_{\mathbb{R}^n}$$

$$\Rightarrow \tilde{X} = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow X = 0_{\mathbb{R}^{n-k}} \text{ Assurdo!}$$

B inv.

Concludiamo che $p_C(\lambda) \neq 0$ e quindi $m_{A,A}(\lambda) = k$

$$= m_{\mathcal{A}}(\lambda).$$

$$(2) \quad \forall \lambda \neq \mu, \quad \forall v \in V_\lambda(A) \quad \forall w \in V_\mu(A)$$

$$\lambda(v \cdot w) = (\lambda v) \cdot w = (Av) \cdot w = v \cdot (Aw) = v \cdot (\mu w) = \mu(v \cdot w)$$

$$\Rightarrow (\lambda - \mu) v \cdot w = 0 \quad \stackrel{\lambda \neq \mu}{\Rightarrow} v \cdot w = 0$$

□

$$\underline{Es}: A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \quad \left(\lambda_1 = \frac{a+d+\sqrt{(a-d)^2+4b^2}}{2} \right),$$

$$\lambda_2 = \frac{a+d-\sqrt{(a-d)^2+4b^2}}{2} \quad \Bigg) = Sp(A)$$

$$\cdot (a-d)^2 + 4b^2 = 0 \quad \Leftrightarrow a=d \text{ e } b=0 \quad \Leftrightarrow A = a1_2.$$

In questo caso (e_1, e_2) è una base canonica composta di autovettori per A .

$$\cdot \text{ Se } (a-d)^2 + 4b^2 > 0. \text{ Allora}$$

$$V_{\lambda_1}(A) = \text{Ker}(\lambda_1 - a, b) = \left\langle \begin{pmatrix} b \\ a - \lambda_1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_{\lambda_2}(A) = \text{Ker}(\lambda_2 - a, b) = \left\langle \begin{pmatrix} b \\ a - \lambda_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

NB:

$$\begin{pmatrix} b \\ a - \lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ a - \lambda_2 \end{pmatrix} = b^2 + (a - \lambda_1)(a - \lambda_2)$$

$$= b^2 + a^2 - a(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1 \lambda_2 =$$

$$= b^2 + a^2 - a(a+d) + (ad - b^2)$$

$$= b^2 + a^2 - a^2 - ad + adb - b^2 = 0.$$

Esercizio 5 (Luglio 2015)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dimostrare che A è ortogonalmente diagonalizzabile e trovare una matrice ortogonale B ed una matrice diagonale D tali che $B^t A B = D$.

Sol: Poiché $A = A^t$ è simmetrica e ortogonalmente diagonalizzabile per il Teorema spettrale.

$$\text{Col } A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle. \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Col } A = V_4(A). \quad \mathbb{R}^4 = \text{Col } A \oplus \text{Ker } A = V_4(A) \oplus V_0(A)$$

$$\Rightarrow \text{Sp}(A) = (0, 4).$$

$$V_0(A) = \text{Ker } A = \text{Ker}(1 \ 1 \ 1 \ 1) = \left\langle v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Cerchiamo una base ortogonale di $V_0(A)$:

$$F_1 = v_1. \quad E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} F_1$$

$$F_2' = v_2 - \frac{v_2 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 = v_2 - \frac{1}{2} F_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow F_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad E_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} F_2$$

$$F_3' = v_3 - \frac{v_3 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 - \frac{v_3 \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 =$$

$$= v_3 - \frac{1}{2} F_1 - \frac{1}{6} F_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 + 1/2 + 1/6 = (-6+3+1)/6 = -2/6 = -1/3 \\ -1/2 + 1/6 = (-3+1)/6 = -2/6 = -1/3 \\ -2/6 = -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad E_3 = \frac{1}{\sqrt{12}} F_3$$

$$F_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad E_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B = (E_1 \ E_2 \ E_3 \ E_4) = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{12} & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{12} & 1/2 \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{12} & 1/2 \\ 0 & 0 & 3/\sqrt{12} & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$D = \text{diag}(0, 0, 0, 4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \quad \square$$