Applicazioni Lineari

Siano V e W due spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$

Una funzione $f: V \to W$ si dice

APPLICAZIONE (o funzione) LINEARE se

$$\boxed{f(\alpha v_1+\beta v_2)=\alpha f(v_1)+\beta f(v_2) \quad \forall \alpha,\beta\in\mathbb{K},\ \forall v_1,v_2\in V}$$

Es: $V=\mathbb{R}[x]$, $W=\mathbb{R}$. La valutazione in 0

$val_0: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R} : p(x) \mapsto p(0)$

è lineare.

Infatti,

$$val_0(\alpha p+\beta q)=(\alpha p+\beta q)(0)=\alpha p(0)+\beta q(0)$$
$$=\alpha\, val_0(p)+\beta\, val_0(q)$$

Non-esempio : $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x+1$

non è lineare. Infatti,

$f(1+1)=f(2)=3$ ma

$f(1)+f(1)=2+2=4\neq f(1+1)$.

Es (Importante!)

Data una base $\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$ di uno spazio vettoriale V, la funzione "coordinate nella base $\mathcal{B}$"

$$F_{\mathcal{B}}: V \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

è lineare.

Infatti,

dati $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$, $w = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$F_{\mathcal{B}}(\alpha v + \beta w) = F_{\mathcal{B}}\big((\alpha x_1 + \beta y_1) v_1 + \dots + (\alpha x_1 + \beta y_n) v_n\big)$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n + \beta y_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \alpha F_{\mathcal{B}}(v) + \beta F_{\mathcal{B}}(w).$$

Ricordiamo che $F_{\mathcal{B}}$ è biiettiva.

Es: $\mathbb{C} = \{z = x+iy \mid x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dim 2:

$\mathbb{C} = \langle 1, i \rangle_{\mathbb{R}}$ come spazio vettoriale.

Consideriamo il coniugio:

$$\zeta : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \zeta(z) = \overline{z}$$

$$\zeta(x+iy) = \overline{x+iy} = x - iy.$$

ζ è $\mathbb{R}$-lineare:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha z_1 + \beta z_2} &= \overline{\alpha(x_1+iy_1) + \beta(x_2+iy_2)} \\
&= \overline{\alpha x_1 + \beta x_2 + i(\alpha y_1 + \beta y_2)} \\
&= \alpha x_1 + \beta x_2 - i(\alpha y_1 + \beta y_2) \\
&= (\alpha x_1 - iy_1) + (\beta x_2 - i\beta y_2) \\
&= \alpha(x_1 - iy_1) + \beta(x_2 - iy_2) = \alpha \overline{z}_1 + \beta \overline{z}_2
\end{aligned}$$

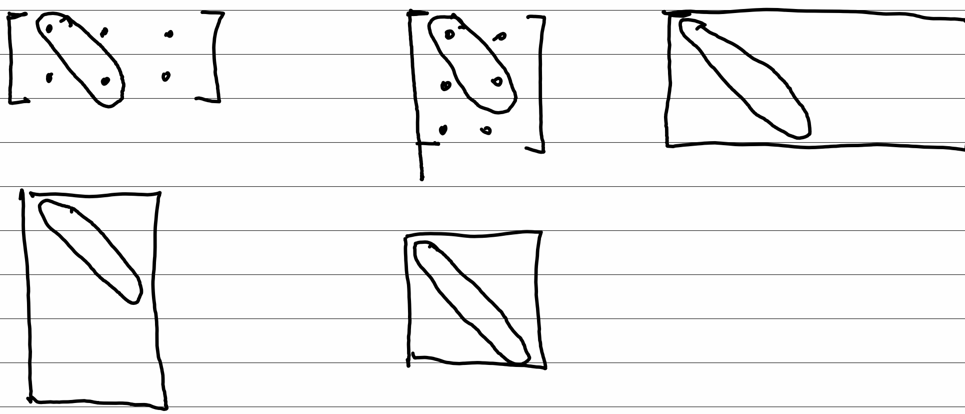
$$\operatorname{Ker} \zeta = \{ z \in \mathbb{C} \mid \overline{z} = 0 \} = \{ 0_{\mathbb{C}} \}.$$

∎

Trasposizione

Data $A \in Mat_{m \times n}$, gli *elementi diagonali* di A sono

$$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{ii} \qquad (i \le \min(m,n))$$



La *matrice trasposta di A* è la matrice

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ottenuta "riflettendo" A rispetto agli elementi diagonali

$$A \in Mat_{m\times n} \Rightarrow A^t = \text{"A trasposta"} \in Mat_{n\times m}$$

$$(A^t)^j_i = A^i_j \qquad \forall i = 1, \dots, m$$
$$\forall j = 1, \dots, n.$$

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(A^t)_i = A^i \qquad\qquad (A^t)^j = A_j$$

i-esima riga di A^t = i-esima colonna di A

j-esima colonna di A^t = j-esima riga di A

TEOREMA: Data $A \in Mat_{m \times n}$

(1) $A^t \in Mat_{n \times m}$

(2) $(A^t)^t = A$

(3) $(cA)^t = c(A^t) \quad \forall c \in \mathbb{R}$

(4) $(A+B)^t = A^t + B^t \quad \forall B \in Mat_{m \times n}$.

dim:

(4) $(A+B)^t_{ij} = (A+B)_{ji} = A_{ji} + B_{ji}$

$$= (A^t)_{ij} + (B^t)_{ij} = (A^t + B^t)_{ij}.$$

(1)-(3) : esercizio $\boxtimes$

Es: Determinare A sapendo che

$$\left(A^t + 2\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\right)^t = 5\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Sol.:

$$\left(A^t + 2\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\right)^t \underset{(4)}{=} \left(A^t\right)^t + \left(2\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\right)^t$$

$$\underset{(1)+(3)}{=} A + 2\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}^t = A + 2\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A + 2\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A = 5\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5-2 & -5-10 \\ 5+4 & 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -15 \\ 9 & 35 \end{pmatrix}$$

$\square$

MATLAB:

A^t si scrive A'.

$A = [1\ 2\ 3 ; 4\ 5\ 6] \Rightarrow A' = [1\ 4 ; 2\ 5 ; 3\ 6]$

Def: Una matrice A si dice

- simmetrica se

$$A = A^t.$$

- anti-simmetrica se

$$A = -A^t$$

OSS: Se A è simmetrica o antisimmetrica A è quadrata, ovvero $m = n$.

Esercizio: 1) La somma di matrici simmetriche è simmetrica

2) Il prodotto di una matrice simmetrica per uno scalare, è simmetrica

<u>Esercizio:</u>

1) A, B antisimmetriche $\Rightarrow A+B$ antisimmetrica

2) A antisimmetrica, $c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow cA$ è antisimmetrica.

<u>Prop.</u>: $\forall A \in Mat_{n \times n}$ $\exists$ $B, C \in Mat_{n \times n}$ t.c.

1) $A = B + C$, 2) $B = B^t$, 3) $C = -C^t$.

<u>dim</u>:

$$A = \overbrace{\frac{1}{2}(A + A^t)}^{B} + \overbrace{\frac{1}{2}(A - A^t)}^{C}$$

$$(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t$$

$$(A - A^t)^t = A^t - (A^t)^t = A^t - A = -(A - A^t)$$

$\boxtimes$

$$\boxed{\text{Se } \mathcal{L}: V \to W \text{ è lineare, allora } \mathcal{L}(0_V) = 0_W.}$$

ovvero, <u>"$\mathcal{L}$ manda zero in zero"</u>.

Infatti,

$$\mathcal{L}(0_V) \underset{\substack{\uparrow \\ 0v = 0_V \ \forall v \in V.}}{=} \mathcal{L}(0\, 0_V) = 0\, \mathcal{L}(0_V) = 0_W$$

<u>Def</u>: Una funzione lineare

$$\mathcal{L}: V \to V$$

si chiama un <u>endomorfismo</u> lineare.

<u>NB</u>: Se V e W sono $\mathbb{K}$-sp. vettoriali e $\mathcal{L}: V \to W$ è lineare, si dice anche che $\mathcal{L}$ è $\mathbb{K}$-lineare per enfatizzare $\mathbb{K}$.

La proprietà più rilevante delle applicazioni lineari è che sono univocamente determinate dai valori che assumono su una base del dominio:

TEOREMA: Siano V e W due spazi vettoriali e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V. Scelti arbitrariamente n vettori

$$w_1, w_2, \dots, w_n \in W$$

esiste un'unica applicazione lineare

$$\mathcal{L}: V \longrightarrow W$$

Tale che $\mathcal{L}(v_i) = w_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$

Si dice che $\mathcal{L}$ estende linearmente la funzione

$$v_i \longmapsto w_i \qquad (i = 1, \dots, n).$$

dim: $\forall v \in V \ \exists!\, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ t.c.

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n.$$

Definiamo $\mathcal{L}: V \to W$ come

$$\mathcal{L}(v) := x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n$$

.) $\mathcal{L}$ è ben-definita, perché $x_1, \dots, x_n \in V$ sono univocamente determinati da v.

.) $\mathcal{L}$ è lineare: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, \quad u = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$$

$$\mathcal{L}(\alpha v + \beta u) = \mathcal{L}(\alpha(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) + \beta(y_1 v_1 + \dots + y_n v_n))$$

$$= \mathcal{L}((\alpha x_1 + \beta y_1) v_1 + \dots + (\alpha x_n + \beta y_n) v_n)$$

$$\overset{\text{def. di } \mathcal{L}}{=} (\alpha x_1 + \beta y_1) w_1 + \dots + (\alpha x_n + \beta y_n) w_n$$

$$= \alpha(x_1 w_1 + \dots + x_n w_n) + \beta(y_1 w_1 + \dots + y_n w_n)$$

$$= \alpha(\mathcal{L}(v)) + \beta(\mathcal{L}(u)). \quad \blacksquare$$

Es: Determinare l'unica applicazione lineare $\mathcal{L}: \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ tale che

$$\mathcal{L}(1) = x - 1$$
$$\mathcal{L}(x) = 1$$
$$\mathcal{L}(x^2) = 2x + 3$$

Sol.:

$$\mathcal{L}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_0 (x-1) + a_1 + a_2 (2x+3)$$
$$= (-a_0 + a_1 + 3a_2) + (a_0 + 2a_2) x$$

$\square$

Nucleo e Immagine

Se $f: V \to W$ è lineare, definiamo il nucleo (o Kernel) di f come

$$\operatorname{Ker} f = \{ v \in V \mid f(v) = 0_W \} \subset V$$

Prop: $\operatorname{Ker} f$ è un sottospazio vettoriale

dim: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall v, w \in \operatorname{Ker} f$

$$f(\alpha v + \beta w) = \alpha f(v) + \beta f(w) = \alpha 0_W + \beta 0_W = 0_W$$

$\Rightarrow \alpha v + \beta w \in \operatorname{Ker} f$. $\blacksquare$

Es: $V = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ derivabile} \}$.

Sia $d: V \to V$ la derivata $d(f) = f'$.

Allora $\operatorname{Ker} d = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f'(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \}$ sono le funzioni costanti.

Ricordiamo che una funzione $f: X \to Y$ da un insieme X (che si chiama il <u>dominio</u> di f) ad un insieme Y (che si chiama il <u>codominio</u> di f) si dice <u>iniettiva</u> se vale la condizione

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

ovvero la condizione equivalente

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

<u>Es</u>: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^3$ è iniettiva:

Infatti, $x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1^3 - x_2^3 = 0$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = 0$$

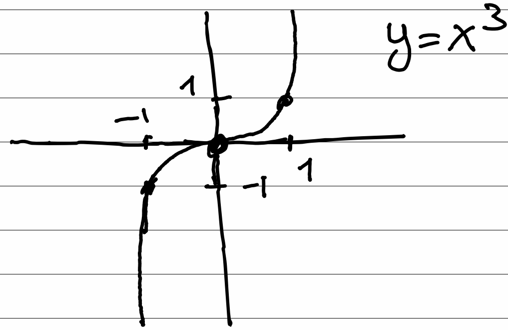
Se $x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = 0$ si avrebbe

$$0 = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + 3 x_1 x_2$$

$\Rightarrow 3 x_1 x_2 = -(x_1 - x_2)^2 \leq 0 \Rightarrow x_1$ e x_2 sono discordi, diciamo $x_1 \leq 0 < x_2$. Ma allora $x_1^3 \leq 0 < x_2^3 \Rightarrow x_1^3 \neq x_2^3$, contro l'ipotesi. Ne segue che se $x_1^3 = x_2^3$ allora $x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 \neq 0$, e quindi

$$x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

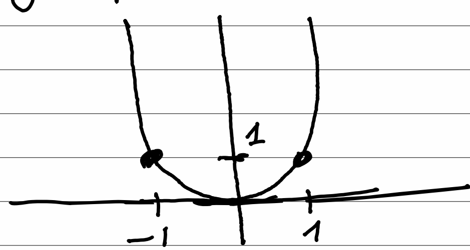
Il grafico di $f(x) = x^3$ è



<u>Non-esempio</u>: La funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ non è iniettiva. Infatti,

$$f(-1) = 1 = f(1) \quad \text{ma} \quad -1 \neq 1.$$

Il suo grafico è



Per funzioni lineari è molto facile verificare l'iniettività:

Prop.: Un'applicazione lineare $\mathcal{L}: V \to W$ è iniettiva se e solo se $\mathrm{Ker}\,\mathcal{L} = \{0_V\}$.

dim:

$\Rightarrow$) Se $\mathcal{L}$ è iniettiva, sia $v \in \mathrm{Ker}\,\mathcal{L}$.

Allora $\mathcal{L}(v) = 0_W = \mathcal{L}(0_V)$

$$\underset{\mathcal{L} \text{ iniettiva}}{\Rightarrow} v = 0_V \Rightarrow \mathrm{Ker}\,\mathcal{L} = \{0_V\}$$

$\Leftarrow$) Se $\mathrm{Ker}\,\mathcal{L} = \{0_V\}$, siano $v_1, v_2 \in V$ tali che $\mathcal{L}(v_1) = \mathcal{L}(v_2)$. Allora

$$\mathcal{L}(v_1) - \mathcal{L}(v_2) = 0_W$$

$$\underset{\mathcal{L} \text{ lineare}}{\Rightarrow} \mathcal{L}(v_1 - v_2) = 0_W$$

$$\Rightarrow v_1 - v_2 \in \mathrm{Ker}\,\mathcal{L} = \{0_V\}$$

$$\Rightarrow v_1 - v_2 = 0_V$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2.$$

Quindi $\mathcal{L}$ è iniettiva. $\boxtimes$

Immagine

L' <u>immagine</u> di $\mathcal{L}: V \to W$ è

$$\operatorname{Im}\mathcal{L} = \{\mathcal{L}(v) \mid v \in V\}$$

$$= \{w \in W \mid \exists v \in V : \mathcal{L}(v) = w\} \subset W.$$

<u>Prop.</u>: Se $\mathcal{L}: V \to W$ è lineare,
$\operatorname{Im}\mathcal{L} \subseteq W$ è un sottospazio vettoriale.

<u>dim</u>: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall w_1 = \mathcal{L}(v_1), w_2 = \mathcal{L}(v_2) \in \operatorname{Im}\mathcal{L}$

$$\alpha w_1 + \beta w_2 = \alpha \mathcal{L}(v_1) + \beta \mathcal{L}(v_2)$$

$$\underset{\mathcal{L}\text{ lineare}}{=} \mathcal{L}(\alpha v_1 + \beta v_2) \in \operatorname{Im}\mathcal{L}$$

$\mathcal{L}$ lineare

$\boxtimes$

Es: Sia $\mathcal{L}: \mathbb{K}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ l'unica funzione lineare tale che

$\mathcal{L}(1) = 1 - x + x^2$, $\mathcal{L}(x) = -1 + x - x^2$, $\mathcal{L}(x^2) = x + x^2$.

Determinare $\mathcal{L}$, una base per $\operatorname{Ker}\mathcal{L}$ ed una base per $\operatorname{Im}\mathcal{L}$.

Sol.: $\mathcal{L}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_0 \mathcal{L}(1) + a_1 \mathcal{L}(x) + a_2 \mathcal{L}(x^2)$

$= a_0(1 - x + x^2) + a_1(-1 + x - x^2) + a_2(x + x^2)$

$= (a_0 - a_1) + (-a_0 + a_1 - a_2)x + (a_0 - a_1 + a_2)x^2$.

$\operatorname{Ker}\mathcal{L} = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid \mathcal{L}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = 0 + 0x + 0x^2\}$

$= \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0 - a_1 = 0, -a_0 + a_1 + a_2 = 0, a_0 - a_1 + a_2 = 0\}$

$= \{a_0 + a_0 x \mid a_0 \in \mathbb{K}\} = \langle 1 + x \rangle \Rightarrow \boxed{\dim \operatorname{Ker}\mathcal{L} = 1}$

$\operatorname{Im}\mathcal{L} = \{\mathcal{L}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{K}\}$

$= \{a_0(1 - x + x^2) + a_1(-1 + x - x^2) + a_2(x + x^2) \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{K}\}$

$= \langle 1 - x + x^2, -1 + x - x^2, x + x^2 \rangle = \langle 1 - x + x^2, x + x^2 \rangle$

$\Rightarrow \boxed{\dim \operatorname{Im}\mathcal{L} = 2}$

<u>Teorema</u> (Formula della dimensione)

Sia $\mathcal{L}: V \to W$ lineare. Se V ammette una base allora anche $\operatorname{Ker}\mathcal{L}$ e $\operatorname{Im}\mathcal{L}$ ammettono una base e si ha

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker}\mathcal{L} + \dim \operatorname{Im}\mathcal{L} = \dim V}$$

<u>dim</u>: Poiché $\operatorname{Ker}\mathcal{L}$ è un sottospazio vettoriale di V, se V ammette una base anche $\operatorname{Ker}\mathcal{L}$ ammette una base. Sia $\{v_1, \dots, v_K\}$ una base di $\operatorname{Ker}\mathcal{L}$. Estendiamola ad una base $\{v_1, \dots, v_K, v_{K+1}, \dots, v_n\}$ di V.

Dimostriamo che l'insieme

$$\{\mathcal{L}(v_{K+1}), \dots, \mathcal{L}(v_n)\}$$

è una base di $\operatorname{Im}\mathcal{L}$.

1) Genera $\operatorname{Im}\mathcal{L}$:

$\forall w = \mathcal{L}(v) \in \operatorname{Im}\mathcal{L} \quad \exists\, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ t.c.

$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$. Allora

$$w = \mathcal{L}(v) = \mathcal{L}(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) =$$

$$= x_1 \mathcal{L}(v_1) + \dots + x_k \mathcal{L}(v_k) + x_{k+1}\mathcal{L}(v_{k+1}) + \dots + x_n \mathcal{L}(v_n)$$

$$= x_{k+1}\mathcal{L}(v_{k+1}) + \dots + x_n \mathcal{L}(v_n)$$

$\mathcal{L}(v_1) = \dots = \mathcal{L}(v_k) = 0_W.$

2) È linearmente indipendente:

$$x_{k+1}\mathcal{L}(v_{k+1}) + \dots + x_n \mathcal{L}(v_n) = 0_W$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(x_{k+1} v_{k+1} + \dots + x_n v_n) = 0_W$$

$\mathcal{L}$ è lineare

$$\Rightarrow x_{k+1} v_{k+1} + \dots + x_n v_n \in \operatorname{Ker}\mathcal{L}$$

$\Rightarrow \exists\, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{K}$ t.c.

$$x_{k+1} v_{k+1} + \dots + x_n v_n = x_1 v_1 + \dots + x_k v_k$$

$$\Rightarrow x_1 v_1 + \dots + x_k v_k - x_{k+1} v_{k+1} - \dots - x_n v_n = 0_V$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \dots = x_k = x_{k+1} = \dots = x_n = 0$$

$\{v_1, \dots, v_n\}$ è lin. Ind.

$\blacksquare$

Illustriamo la dimostrazione per la funzione $\mathcal{L}: \mathbb{K}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ vista prima, ovvero

$$\mathcal{L}(a_0+a_1x+a_2x^2) = (a_0-a_1)+(-a_0+a_1-a_2)x+(a_0-a_1+a_2)x^2.$$

Sappiamo che una base per $\operatorname{Ker}\mathcal{L}$ è $\{1+x\}$.

Estendiamola ad una base di $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$, ad esempio $\{1+x,\ 1,\ x^2\}$.

Allora la dimostrazione del teorema ci dice che $\{\mathcal{L}(1), \mathcal{L}(x^2)\} = \{1-x+x^2,\ x+x^2\}$ è una base di $\operatorname{Im}\mathcal{L}$.

In effetti,

$$\dim \operatorname{Ker}\mathcal{L} + \dim \operatorname{Im}\mathcal{L} = 1+2 = 3 = \dim \mathbb{K}[x]_{\leq 2}.$$

Una funzione $f: X \to Y$ si dice suriettiva se $\operatorname{Im} f = Y$.

Def: Un isomorfismo lineare da V a W è un'applicazione lineare

$$\mathcal{L}: V \to W$$

che è sia iniettiva che suriettiva. In questo caso scriviamo

$$\mathcal{L}: V \xrightarrow{\sim} W.$$

V e W si dicono isomorfi se esiste un isomorfismo lineare da V a W. In questo caso scriviamo

$$V \simeq W.$$

TEOREMA:

Se V è uno spazio vettoriale (reale) di dimensione n, allora

$$V \simeq \mathbb{R}^n.$$

Più precisamente, ogni base $\mathcal{B}$ di V fornisce l'isomorfismo lineare

$$F_{\mathcal{B}} : V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$$

dim: $F_{\mathcal{B}}$ è lineare, iniettiva e suriettiva.

La proiezione su un sottospazio vettoriale lungo un suo supplementare

Sia V uno spazio vettoriale f.g. su $\mathbb{K}$ e sia $U \subseteq V$ un sottospazio vettoriale.
Scegliamo un supplementare W di U cosicché $V = U \oplus W$.

Allora $\forall v \in V \ \exists! u \in U$ e $\exists! w \in W$ t.c.

$$v = u + w \qquad (*)$$

Definiamo la proiezione su U lungo W come la funzione

$$pr_U^W : V \longrightarrow V$$

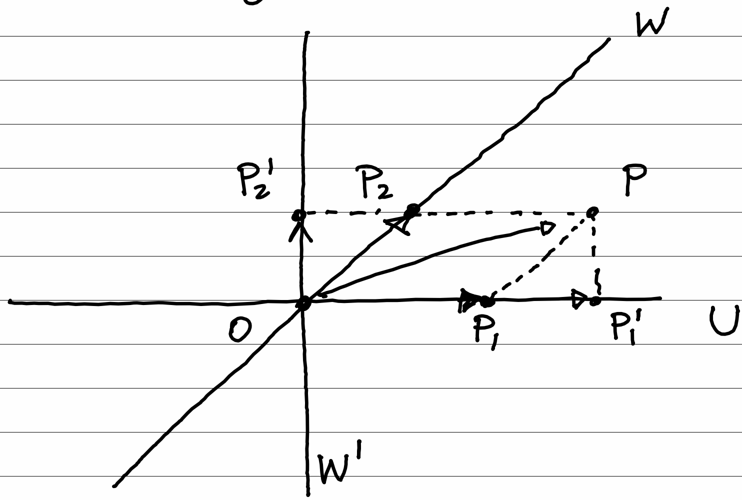
definita da

$$pr_U^W (u+w) = u.$$

La funzione pr_U^W è ben definita per $(*)$.

$\ker pr_U^W = W$, $\operatorname{Im} pr_U^W = U$.

Es: $V = \mathcal{V}_0^2$



$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}$ e $pr_U^W(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP_1}$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1'} + \overrightarrow{OP_2'}$ e $pr_U^{W'}(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP_1'}$

Funzioni composte

Date due funzioni

$$f : X \to Y \quad e \quad g : Y \to Z$$

definiamo la funzione composta

$$g \circ f : X \to Z$$

come

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Il simbolo "$\circ$" si legge "dopo" "composta", quindi

$g \circ f$ si legge "g dopo f"

oppure "g composta f".

<u>Es</u>: Se $f(x) = \sin x$, $g(x) = 2x$ allora

$$(g \circ f)(x) = 2 \sin x \quad e$$

$$(f \circ g)(x) = \sin(2x)$$

Si noti che $g \circ f \neq f \circ g$: infatti

$$(g \circ f)\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \quad , (f \circ g)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \pi = 0 \neq 2.$$

Proposizione: La composizione di funzioni lineari è lineare.

dim: Siano V_1, V_2 e V_3 dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali.
Siano $f_1 : V_1 \to V_2$ e $f_2 : V_2 \to V_3$ lineari.
Dimostriamo che $f_2 \circ f_1 : V_1 \to V_3$ è lineare.
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $\forall v_1, v_2 \in V_1$

$$f_2 \circ f_1 (\alpha v_1 + \beta v_2) = f_2 \left(f_1 (\alpha v_1 + \beta v_2) \right)$$

f_1 Lineare

$$= f_2 \left(\alpha f_1(v_1) + \beta f_1(v_2) \right)$$

f_2 Lineare

$$= \alpha f_2 \left(f_1(v_1) \right) + \beta f_2 \left(f_1(v_2) \right)$$

$$= \alpha f_2 \circ f_1 (v_1) + \beta f_2 \circ f_1 (v_2).$$

$\blacksquare$

Funzioni inverse (destre e sinistre)

Dato un insieme X, denotiamo con Id_X la funzione identità:

$$Id_X : X \longrightarrow X$$
$$x \longmapsto x.$$

Se V è uno spazio vettoriale, Id_V è chiaramente un isomorfismo lineare da V a V.

<u>Def</u>: Data una funzione

$$f : X \longrightarrow Y$$

un' <u>inversa destra</u> di f è una funzione $g : Y \longrightarrow X$ t.c.

$$f \circ g = Id_Y$$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "Id_Y"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

<u>OSS</u>: Se $f : X \to Y$ ammette un'inversa destra allora f è suriettiva.

<u>dim</u>:

Se $\exists\, g : Y \to X$ t.c.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "Id_Y"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

$f \circ g = Id_Y$, allora $\forall y \in Y$

$y = Id_Y(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$

$\Rightarrow f$ è suriettiva.

Similmente, un'<u>inversa sinistra</u> di $f: X \to Y$ è una funzione $g: Y \to X$ t.c. $g \circ f = Id_X$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "Id_X"'] & Y \arrow[r, "g"] & X \end{tikzcd}$$

<u>OSS</u>: Se $f: X \to Y$ ha inversa sinistra allora è <u>iniettiva</u>. Infatti, se $g \circ f = Id_X$ allora

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Def: Data $f: X \to Y$ un'inversa di f è una funzione $g: Y \to X$ t.c. 1) $f \circ g = Id_Y$, 2) $g \circ f = Id_X$

OSS: Se l'inversa esiste è unica ⊗

$h(y) = h(Id_Y(y)) = h \circ (f \circ g)(y) = (h \circ f)(g(y))$
$= Id_X(g(y)) = g(y)$.

Notazione: L'inversa di f si denota f^{-1}.

Prop.: f è iniettiva e suriettiva $\Leftrightarrow$ f ha inversa.

dim: $\Rightarrow$) $f: X \to Y$ iniettiva e suriettiva
$\Rightarrow \forall y \in Y \ \exists! \ x_y \in X$ t.c. $f(x_y) = y$.
Definiamo $g: Y \to X$ come $g(y) = x_y$
Essa è una funzione ben definita
e $f(g(y)) = f(x_y) = y$
$g(f(x)) = x$.

$\Leftarrow$) Se f ammette inversa destra e sinistra è iniettiva e suriettiva. ⊠

TEOREMA (Inversa di un isomorfismo lineare)

Se $\mathcal{L}: V \to W$ è un isomorfismo lineare allora $\mathcal{L}^{-1}: W \to V$ è lineare.

dim: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ $\quad \forall w_1 = \mathcal{L}(v_1), w_2 \in \mathcal{L}(v_2) \in W$

$$\mathcal{L}^{-1}(\alpha w_1 + \beta w_2) = \mathcal{L}^{-1}(\alpha \mathcal{L}(v_1) + \beta \mathcal{L}(v_2))$$

$$= \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(\alpha v_1 + \beta v_2))$$

$\mathcal{L}$ lineare

$$= \mathcal{L}^{-1} \circ \mathcal{L}(\alpha v_1 + \beta v_2)$$

$$= \alpha v_1 + \beta v_2$$

$$\mathcal{L}^{-1}(w_1) = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(v_1)) = v_1$$

$$\mathcal{L}^{-1}(w_2) = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(v_2)) = v_2 .$$

Quindi

$$\alpha \mathcal{L}^{-1}(w_1) + \beta \mathcal{L}^{-1}(w_2) = \alpha v_1 + \beta v_2 .$$

Concludiamo che

$$\mathcal{L}^{-1}(\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha \mathcal{L}^{-1}(w_1) + \beta \mathcal{L}^{-1}(w_2)$$

$\boxed{\beta}$

<u>Es</u> (importante):

Se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V la funzione "coordinate nella base $\mathcal{B}$"

$$F_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$F_{\mathcal{B}}(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

è lineare e biiettiva. L'inversa è

$$F_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathbb{K}^n \longrightarrow V$$

$$F_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n.$$

Come sono fatte le applicazioni lineari da $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}^m$?

Sia $\mathcal{L}: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ $\mathbb{K}$-lineare.

Allora

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \mathcal{L}(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n)$$

$$= x_1 \mathcal{L}(e_1) + x_2 \mathcal{L}(e_2) + \dots + x_n \mathcal{L}(e_n)$$

Notiamo che per ogni $i = 1, \dots, n$ $\mathcal{L}(e_i) \in \mathbb{K}^m$ ovvero è una matrice colonna della forma

$$\mathcal{L}(e_i) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

Possiamo allora considerare la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

che ha per colonne $\mathcal{L}(e_1), \mathcal{L}(e_2), \dots, \mathcal{L}(e_n)$.

allora,

$$\mathcal{L}(X) = x_1 A^1 + x_2 A^2 + \dots + x_n A^n$$

Con questo in testa, possiamo dare la seguente definizione.

Def: Data una matrice $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$ ed una matrice $X \in Mat_{n\times 1}(\mathbb{K})$ definiamo il prodotto righe per colonne di A per X come la matrice

$$AX := x_1 A^1 + x_2 A^2 + \dots + x_m A^n \in Mat_{m\times 1}(\mathbb{K})$$

OSS: La matrice colonna AX ha come i-esima entrata:

$$(AX)_i = x_1 A^1_i + x_2 A^2_i + \dots + x_n A^n_i =$$

$$= a_{i\underline{1}} x_{\underline{1}} + a_{i\underline{2}} x_{\underline{2}} + \dots + a_{i\underline{n}} x_{\underline{n}}.$$

Fissata $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$
abbiamo la funzione

$$S_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$

definita come

$$S_A(X) = AX$$

Essa si chiama la <u>moltiplicazione a sinistra per A</u>.

<u>Prop.</u>: S_A è lineare.

<u>dim</u>: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \ \forall X, Y \in \mathbb{K}^n$

$$S_A(\alpha X + \beta Y) = (\alpha x_1 + \beta y_1) A^1 + \dots + (\alpha x_n + \beta y_n) A^n$$

$$= \alpha (x_1 A^1 + x_2 A^2 + \dots + x_n A^n) + \beta (y_1 A^1 + \dots + y_n A^n)$$

$$= \alpha S_A(X) + \beta S_A(Y).$$

Ricapitolando,

le funzioni lineari da $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}^m$ sono tutte e sole le moltiplicazioni a sinistra per una matrice di taglia $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$.

<u>OSS</u> (importante):

$$\boxed{A^i = S_A(e_i)}$$

Date due matrici

$A \in Mat_{h \times m}(\mathbb{K})$ e $B \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$

esse definiscono le due funzioni lineari

$$\mathbb{K}^n \xrightarrow{S_B} \mathbb{K}^m \xrightarrow{S_A} \mathbb{K}^h$$

e quindi la loro composizione

$$\mathbb{K}^n \xrightarrow{S_A \circ S_B} \mathbb{K}^h$$

è una funzione lineare.

Esiste quindi una matrice $C \in Mat_{h \times n}(\mathbb{K})$ tale che

$$S_A \circ S_B = S_C$$

La matrice C si chiama il prodotto righe per colonne di A per B e si denota con

$$C = AB.$$

Com'è fatta $C = AB$?

$$C^i = S_C(e_i) = S_A(S_B(e_i)) = S_A(B^i)$$

$$= AB^i = b_{1i}A^1 + b_{2i}A^2 + \dots + b_{mi}A^m$$

Quindi,

$$C^i_j = b_{1i}A^1_j + b_{2i}A^2_j + \dots + b_{mi}A^m_j$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_{j\underline{k}}\, b_{\underline{k}i} = A_j B^i$$

Def: Il nucleo di una matrice $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$ è il nucleo di S_A:

$$\operatorname{Ker} A := \operatorname{Ker}(S_A) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0_m\} \subseteq \mathbb{K}^n$$

L'immagine di una matrice $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$ è l'immagine di S_A:

$$\operatorname{Im} A := \operatorname{Im} S_A = \operatorname{Col}(A) = \langle A^1, \dots, A^n \rangle \subset \mathbb{K}^m$$

Il rango di una matrice A è la dimensione di Im A e si denota

$$\operatorname{rg} A := \dim \operatorname{Im} A$$

Dal Teorema sulla dimensione otteniamo

$$\boxed{\operatorname{rg} A = n - \dim \operatorname{Ker} A}$$

per $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$.

In MATLAB il comando null(A) restituisce una matrice le cui colonne formano una base di Ker A.

<u>NB</u>: Usare il comando sym per definire la matrice. <u>Es</u>:

A = sym([1,2;3,4])