Il Teorema di Cayley-Hamilton

Dato un polinomio

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

possiamo "valutarlo" in una matrice quadrata A sostituendo x con A e 1 con $\mathbb{1}_n$

$$p(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 \mathbb{1}_n .$$

Es: $p(x) = x^2 + x + 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$p(A) = A^2 + A + \mathbb{1}_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 10 & 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 18 \\ 12 & 27 \end{pmatrix}$$

Il Teorema di Cayley-Hamilton dice che valutando il polinomio caratteristico di A in A si ottiene la matrice nulla:

Teorema (di Cayley-Hamilton)

Sia $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$. Allora $p_A(A) = 0_{n \times n}$

dim: Dimostriamo che

$$p_A(A) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

è l'applicazione lineare nulla, ovvero $p_A(A)v = 0_{\mathbb{R}^n}$ $\forall v \in \mathbb{R}^n$.

Se $v = 0_{\mathbb{R}^n}$, $p_A(A)v = 0$ perché $p_A(A)$ è lineare essendo una matrice.

Sia $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. Sia k il più grande intero t.c. l'insieme

$$\{v, Av, A^2v, \dots, A^kv\}$$

è linearmente indipendente.

Quindi $\exists\, r_0, r_1, \dots, r_k \in \mathbb{R}$ t.c.

$$A^{k+1}v = -r_0 v - r_1 Av - \dots - r_k A^k v$$

(la scelta dei segni sarà chiara a breve).

- Estendiamo questo insieme linearmente indipendente ad una base di $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{B} = \{v, Av, \dots, A^k v, v_{k+2}, \dots, v_n\}$$

In questa base la matrice A diventa

$$Z = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ k \\ k+1 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & k & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -r_0 & & \\ 1 & 0 & 0 & & \vdots & -r_1 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots & \vdots & & L \\ \vdots & & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & -r_{k-1} & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -r_k & \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & & & & & & \vdots & M \\ 0 & \cdots & & & & & 0 & \end{array}\right) \end{array}$$

Quindi A è simile a Z e quindi

$$P_A(x) = P_Z(x) = P_M(x)\, P_C(x)$$

dove

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 0 & -r_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -r_1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 & -r_k \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di C è proprio

$$P_C(x) = x^{k+1} + r_k x^k + \dots + r_1 x + r_0$$

Ad esempio

- $C = \begin{pmatrix} 0 & -r_0 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix}$ $\quad P_C(x) = x^2 + r_1 x + r_0$

- $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -r_0 \\ 1 & 0 & -r_1 \\ 0 & 1 & -r_2 \end{pmatrix}$ $\quad P_3(x) = x^3 + r_2 x^2 + r_1 x + r_0$

C si dice per questo la "matrice compagna" del polinomio

$$x^{k+1} + r_k x^k + \dots + r_1 x + r_0.$$

Quindi,

$$\begin{aligned} P_A(A)v &= P_M(A) P_C(A) v \\ &= P_M(A)\left[A^{k+1}v + r_k A^k v + \dots + r_1 A v + r_0 v\right] \\ &= 0_{\mathbb{R}^n} \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Possiamo usare il Teorema di Cayley-Hamilton per calcolare l'<u>inversa</u> di una matrice

<u>Es</u>: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$P_A(x) = x^2 - 4x + 1$$

Teorema di Cayley-Hamilton

$$\Rightarrow P_A(A) = A^2 - 4A + \mathbb{1}_2 = O_{2\times 2}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{1}_2 = 4 \cdot A - A^2 = A\,(4\mathbb{1}_2 - A)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = 4\mathbb{1}_2 - A =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxtimes$

Per calcolare l'inversa di una matrice abbiamo quindi a disposizione 3 tecniche:

1) Algoritmo di inversione
2) Formula di Cramer
3) Teorema di Cayley-Hamilton