Fattorizzazione LU

Mar. 13.11

Si tratta di una caso particolare dell'algoritmo di inversione:

Supponiamo che $A \in Mat_{m \times n}$ si possa ridurre a scala utilizzando solo matrici elementari del tipo

$$F_{ij}(\lambda) \quad \text{con} \quad \underline{\underline{i > j}}$$

ovvero sommando ad una riga un multiplo di una riga che la precede.

Una matrice A con queste proprietà si chiama inferiormente riducibile.

Quindi $A \sim U$ senza scambi di riga.

Es: ·) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ non è inferiormente riducibile

·) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è inferiormente riducibile se e solo se $a \neq 0$.

Def: Una matrice quadrata $L = (l_{ij}) \in Mat_{m \times m}$ si dice <u>triangolare bassa</u> (o triangolare inferiore) se $l_{ij} = 0 \ \forall i < j$:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ l_{m1} & \cdots & & l_{mm} \end{pmatrix}$$

Es: $F_{ij}(\lambda)$ è tr. bassa se $i > j$

Def: Una matrice quadrata $U = (u_{ij}) \in Mat_{m \times m}$ si dice <u>triangolare alta</u> (o triangolare superiore) se $u_{ij} = 0 \ \forall i > j$

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1m} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{mm} \end{pmatrix}$$

Es: $F_{ij}(\lambda)$ è triang. alta se $i < j$.

OSS: U quadrata. Allora
U triang. superiore $\Leftrightarrow$ U a scala.

NB: "L" sta per "Lower Triangular".
"U" sta per "Upper Triangular".

Prop.: 1) $L_1, L_2 \in Mat_{m\times m}$
Triang. inferiori $\Rightarrow L_1 L_2$ è triang inf.
2) L triang. inf. invertibile
$\Rightarrow L^{-1}$ è triang. inf.
3) $U_1, U_2 \in Mat_{m\times m}$ Triang. superiori
$\Rightarrow U_1 U_2$ è triang. superiore
4) U triang. sup. invertibile
$\Rightarrow U^{-1}$ è triang. superiore.

dim: 1) $(L_1 L_2)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} (L_1)_{ik} (L_2)_{kj}$

$(L_1)_{ik} = 0$ se $i < k$, $(L_2)_{kj} = 0$ se $k < j$.

Quindi se $i < j$, $(L_1 L_2)_{ij} = 0$.

2) L inv. triang. bassa

$\Rightarrow$ L può essere ridotta a scala usando solo $F_{ij}(\lambda)$ con $i>j$ e $D_i(\lambda)$. Infatti, gli elementi diagonali di L sono non-nulli perché $rg(L) = rg(L^t) = \#$ pivot.

Ne segue che L^{-1} è prodotto di matrici elementari $D_i(\lambda), F_{ij}(\lambda)$ (con $i>j$) che sono triangolari inferiori. Da 1) segue che L^{-1} è triangolare inferiore.

3) U triang. sup. $\Rightarrow$ U^t è triang. inf.

$\Rightarrow$ $U_2^t U_1^t$ è triang. inf.

$\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $U_1 U_2 = (U_2^t U_1^t)^t$ è triang. sup.

4) $(U^{-1})^t = (U^t)^{-1}$ $\underset{(2)}{\Rightarrow}$ U^{-1} è tr. sup.

$\boxtimes$

Una fattorizzazione LU di una matrice $A \in Mat_{m \times n}$ è una fattorizzazione di A

$$A = LU$$

dove ·) $L = (l_{ij}) \in Mat_{m \times m}$ è triangolare inferiore e $l_{ii} = 1 \ \forall i = 1, \dots, m$

·) $U \in Mat_{m \times n}$ è a scala.

TEOREMA: Se A è inferiormente riducibile allora A ammette una fattorizzazione LU: $A = LU$.

Tali matrici L ed U si trovano:

$$[A \mid \mathbb{1}_m] \rightsquigarrow [U \mid T]$$

·) NO scambi di riga
·) NO $F_{ij}(\lambda)$ con $i<j$
·) NO $D_i(\lambda)$

a scala

$$A = LU \quad \text{con} \quad L = T^{-1}.$$

∎

OSS: Se A è quadrata ($m=n$) allora U è triangolare superiore, e da questo viene la terminologia.

Es: Determinare, se esiste, la decomposizione LU di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -6 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Sol.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -6 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = F_{31}(-1)\,F_{21}(-2)\,A$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = F_{32}(-1)\,F_{31}(-1)\,F_{21}(-2)\,A = U$$

$$\Rightarrow A = F_{21}(-2)^{-1}\,F_{31}(-1)^{-1}\,F_{32}(-1)^{-1}\,U$$

$$= F_{21}(2)\,F_{31}(1)\,F_{32}(1)\,U$$

$$L = F_{21}(2)\,F_{31}(1)\,F_{32}(2)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>OSS</u> (Importante!): Per trovare L non è necessario fare le moltiplicazioni $\prod F_{ij}(\lambda_k) = L$.
L si legge direttamente dalla riduzione a scala di A:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ \boxed{2} & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Più precisamente, L si trova come segue:

Siano $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$ le colonne dominanti di A, ovvero quelle che diventano dominanti in U.

Merc. 14.11.

Per ottenere U dobbiamo

1) Ripulire la prima colonna A^{j_1} non-nulla di A: dato che A è inferiormente riducibile, $a_{1j_1} \neq 0$.

Quindi facciamo

$$F_{m1}\left(-\frac{a_{mj_1}}{a_{1j_1}}\right) F_{m-1\,1}\left(-\frac{a_{m-1j_1}}{a_{1j_1}}\right) \cdots F_{21}\left(-\frac{a_{2j_1}}{a_{1j_1}}\right) A$$

e otteniamo

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} & & & & & & j_2 & & & \\ & & & & & & \downarrow & & & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & a_{1j_1} & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & & * \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & & & * & & \vdots \\
 & & & & & & & \vdots & & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & *
\end{pmatrix}
\end{array}$$

2) Ripetere l'operazione sulla matrice ottenuta da A eliminando la prima riga.

- Alla fine otteniamo una matrice a scala U ed una matrice triang. inf. T t.c. $TA=U$ e T è prodotto di matrici elementari $F_{ik}(-m_{ik})$ con $i>k$.

$$T = \prod_{i>j_r} F_{ir}(-m_{ij_r}) \cdot \ldots \cdot \prod_{i>j_1} F_{i1}(-m_{ij_1})$$

Quindi $A = T^{-1}U = LU$ dove

$$L = \prod_{i>j_1} F_{i1}(m_{ij_1}) \prod_{i>j_2} F_{i2}(m_{ij_2}) \cdots \prod_{i>j_r} F_{ir}(m_{ij_r})$$

<u>TEOREMA</u> (Fattorizzazione LU)

Sia $A \in Mat_{m\times n}$ una matrice INF. RID.

Allora $A = LU$ come sopra e

$$L = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{2j_1} & 1 & 0 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{3j_1} & m_{3j_2} & 1 & & & & & \\ m_{4j_1} & m_{4j_2} & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & m_{r+1,j_r} & 1 & & \\ & \vdots & & & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ & & & & \vdots & \vdots & & \\ m_{mj_1} & m_{mj_2} & & & m_{m,j_r} & 0 & & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{matrix} 1 & 2 & \cdots & r & r+1 & \cdots & m \end{matrix} \end{array}$$

dim:

$$(*)\quad F_{ij}(\lambda)F_{ke}(\mu) = (\mathbb{1}_m + \lambda E_{ij})(\mathbb{1}_m + \mu E_{ke})$$

$$= \mathbb{1}_m + \lambda E_{ij} + \mu E_{ke} + \lambda\mu E_{ij} E_{ke}$$

Quanto fa $E_{ij} E_{ke}$?

$$E_{ij} E_{ke} = \begin{cases} E_{ie} & \text{se } j=k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Es: $m=3$

$$F_{12}(\lambda)F_{23}(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda\mu \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nel nostro caso L è prodotto di matrici

$$L = \prod_{i>1} F_{i1}(m_{ij_1}) \prod_{i>2} F_{i2}(m_{ij_2}) \cdots$$

e quindi il risultato segue da $(*)$.

Ad esempio:

$$F_{i1}(m_{ij_1})F_{k2}(m_{kj_2}) = \mathbb{1} + m_{ij_1}E_{i1} + m_{kj_2}E_{k2}$$

Più in generale:

$$\Big(F_{i_1 1}(m_1)\, F_{i_2 2}(m_2) \cdots F_{i_r r}(m_r)\Big)_{kl} =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se} \quad k = l \\ m_1 & \text{se} \quad k = i_1 \text{ e } l = 1 \\ m_2 & \text{se} \quad k = i_2 \text{ e } l = 2 \\ \vdots & \\ m_r & \text{se} \quad k = i_r \text{ e } l = r \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In conclusione,

$$L = \prod F_{i1}(m_{ij_1}) \cdots \prod F_{ir}(m_{ij_r})$$

$$\ell_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad k = l \\ m_{ij_s} & \text{se} \quad k = i \text{ e } j = s \leq r \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Es: Calcolare la dec. LU della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

Sol.:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 7 & 10 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 12 \end{pmatrix} =$$

$$= F_{21}\left(\frac{1}{2}\right) F_{31}\left(\frac{1}{2}\right) A \Rightarrow m_{21} = -\frac{1}{2}$$

$$m_{31} = -\frac{1}{2}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = F_{32}(-3) F_{21}\left(\frac{1}{2}\right.$$

$$= F_{32}(-3) F_{21}\left(\frac{1}{2}\right) F_{31}\left(\frac{1}{2}\right) A \Rightarrow m_{32} = 3$$

Quindi otteniamo

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \blacksquare$$

Es: Trovare la dec. LU di

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 10 & 0 & 5 \\ -3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 10 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Sol:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3/5 & 1 & 0 & 0 \\ -2/5 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 10 & 0 & 5 \\ -3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 10 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \longmapsto R_2 + \frac{3}{5} R_1 \Rightarrow m_{12} = -\frac{3}{5}$$
$$R_3 \longmapsto R_3 + \frac{2}{5} R_1 \Rightarrow m_{13} = -\frac{2}{5}$$
$$R_4 \longmapsto R_4 - \frac{1}{5} R_1 \Rightarrow m_{14} = \frac{1}{5}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & 10 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \longmapsto R_3 - \frac{1}{2} R_2 \qquad m_{32} = \frac{1}{2}$$
$$R_4 \longmapsto R_4 - R_2 \qquad m_{42} = 1$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & 10 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3/5 & 1 & 0 & 0 \\ -2/5 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es: Trovare la dec. LU di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -6 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Sol.:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -6 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} R_2 \mapsto R_2 - 2R_1 & m_{21} = 2 \\ R_3 \mapsto R_3 - R_1 & m_{31} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \mapsto R_3 - R_2 \qquad m_{32} = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

Es: Risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

Sol.: la matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -6 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

ammette decomposizione LU con

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Risolviamo prima $UX = Y$ e poi $LY = b$:

1) $UX = Y$:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = y_1 \\ 2x_2 + 3x_3 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$x_3 = y_3$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{2}(y_2 - 3x_3) = \frac{1}{2} y_2 - \frac{3}{2} y_3$$

$$x_1 = y_1 + 4\left(\frac{1}{2} y_2 - \frac{3}{2} y_3\right) - y_3$$

$$= y_1 + 2y_2 - 7y_3$$

2) $LY = b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} y_1 & = 1 \\ 2y_1 + y_2 & = 1 \\ y_1 + y_2 + y_3 & = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 1 - 2y_1 = 1 - 2 = -1$

$y_3 = 1 - y_1 - y_2 = 1 - 1 + 1 = 1$

$\Rightarrow \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underset{1)}{\Longrightarrow} \quad X = \begin{pmatrix} y_1 + 2y_2 - 7y_3 \\ \frac{1}{2} y_2 - \frac{3}{2} y_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>NB</u>:

In generale, se A non è inf. riducibile allora bisogna scambiare delle righe per ottenere una matrice inf. rid.. Ovvero $\forall A \in Mat_{m \times n}$ $\exists P$ matrice di permutazione t.c. PA è inf. rid..

Fattorizzazione LU

Mar. 13.11

Si tratta di una caso particolare dell'algoritmo di inversione:

Supponiamo che $A \in Mat_{m \times n}$ si possa ridurre a scala utilizzando solo matrici elementari del tipo

$$F_{ij}(\lambda) \quad \text{con} \quad \underline{\underline{i > j}}$$

ovvero sommando ad una riga un multiplo di una riga che la precede.

Una matrice A con queste proprietà si chiama inferiormente riducibile.

Quindi $A \rightsquigarrow U$ senza scambi di riga.

Es: ·) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ non è inferiormente riducibile

·) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è inferiormente riducibile se e solo se $a \neq 0$.

Def: Una matrice quadrata $L = (l_{ij}) \in Mat_{m \times m}$ si dice triangolare bassa (o triangolare inferiore) se $l_{ij} = 0 \ \forall i < j$:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ l_{m1} & & & l_{mm} \end{pmatrix}$$

Es: $F_{ij}(\lambda)$ è tr. bassa se $i > j$

Def: Una matrice Quadrata $U = (u_{ij}) \in Mat_{m \times m}$ si dice triangolare alta (o triangolare superiore) se $u_{ij} = 0 \ \forall i > j$

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1m} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & u_{mm} \end{pmatrix}$$

Es: $F_{ij}(\lambda)$ è triang. alta se $i < j$.

OSS: U quadrata. Allora
U triang. superiore $\Leftrightarrow$ U a scala.

NB: "L" sta per "Lower Triangular".
"U" sta per "Upper Triangular".

Prop.: 1) $L_1, L_2 \in Mat_{m\times m}$
Triang. inferiori $\Rightarrow L_1 L_2$ è triang inf.
2) L triang. inf. invertibile
$\Rightarrow L^{-1}$ è triang. inf.
3) $U_1, U_2 \in Mat_{m\times m}$ Triang. superiori
$\Rightarrow U_1 U_2$ è triang. superiore
4) U triang. sup. invertibile
$\Rightarrow U^{-1}$ è triang. superiore.

dim: 1) $(L_1 L_2)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} (L_1)_{ik} (L_2)_{kj}$

$(L_1)_{ik} = 0$ se $i < k$, $(L_2)_{kj} = 0$ se $k < j$.

Quindi se $i < j$, $(L_1 L_2)_{ij} = 0$.

2) L inv. triang. bassa

$\Rightarrow$ L può essere ridotta a scala usando solo $F_{ij}(\lambda)$ con $i>j$ e $D_i(\lambda)$. Infatti, gli elementi diagonali di L sono non-nulli perché $rg(L) = rg(L^t) = \#$ pivot.

Ne segue che L^{-1} è prodotto di matrici elementari $D_i(\lambda)$, $F_{ij}(\lambda)$ (con $i>j$) che sono triangolari inferiori. Da 1) segue che L^{-1} è triangolare inferiore.

3) U triang. sup. $\Rightarrow$ U^t è triang. inf.

$\Rightarrow$ $U_2^t U_1^t$ è triang. inf.

$\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $U_1 U_2 = (U_2^t U_1^t)^t$ è triang. sup.

4) $(U^{-1})^t = (U^t)^{-1}$ $\underset{(2)}{\Rightarrow}$ U^{-1} è tr. sup.

$\boxtimes$

Una fattorizzazione LU di una matrice $A \in Mat_{m \times n}$ è una fattorizzazione di A

$$A = LU$$

dove .) $L = (l_{ij}) \in Mat_{m \times m}$ è triangolare inferiore e $l_{ii} = 1 \ \forall i = 1, \dots, m$

.) $U \in Mat_{m \times n}$ è a scala.

TEOREMA: Se A è inferiormente riducibile allora A ammette una fattorizzazione LU: $A = LU$.

Tali matrici L ed U si trovano:

$$[A \mid \mathbb{1}_m] \rightsquigarrow [U \mid T]$$

.) NO scambi di riga

.) NO $F_{ij}(\lambda)$ con $i<j$

.) NO $D_i(\lambda)$

a scala

$$A = LU \quad \text{con} \quad L = T^{-1}.$$

■

OSS: Se A è quadrata ($m=n$) allora U è triangolare superiore, e da questo viene la terminologia.

Es: Determinare, se esiste, la decomposizione LU di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -6 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Sol.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -6 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = F_{31}(-1)\, F_{21}(-2)\, A$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = F_{32}(-1)\, F_{31}(-1)\, F_{21}(-2)\, A = U$$

$$\Rightarrow A = F_{21}(-2)^{-1}\, F_{31}(-1)^{-1}\, F_{32}(-1)^{-1}\, U$$

$$= F_{21}(2)\, F_{31}(1)\, F_{32}(1)\, U$$

$$L = F_{21}(2)\, F_{31}(1)\, F_{32}(2)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>OSS</u> (Importante!): Per trovare L non è necessario fare le moltiplicazioni $\prod F_{ij}(\lambda_k) = L$.
L si legge direttamente dalla riduzione a scala di A:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ \boxed{2} & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Più precisamente, L si trova come segue:

Siano $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_k \le n$ le colonne dominanti di A, ovvero quelle che diventano dominanti in U.

Merc. 14.11.

Per ottenere U dobbiamo

1) Ripulire la prima colonna A^{j_1} non-nulla di A: dato che A è inferiormente riducibile, $a_{1j_1} \neq 0$.
Quindi facciamo

$$F_{m1}\left(-\frac{a_{mj_1}}{a_{1j_1}}\right) F_{m-1\,1}\left(-\frac{a_{m-1\,j_1}}{a_{1j_1}}\right) \cdots F_{21}\left(-\frac{a_{2j_1}}{a_{1j_1}}\right) A$$

e otteniamo

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & j_2 & & \\ & & & & & & \downarrow & & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & a_{1j_1} & * & \cdots & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & & & * & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \cdots & *
\end{pmatrix}
\end{array}$$

2) Ripetere l'operazione sulla matrice ottenuta da A eliminando la prima riga.

- Alla fine otteniamo una matrice a scala U ed una matrice triang. inf. T t.c. $TA=U$ e T è prodotto di matrici elementari $F_{ik}(-m_{ik})$ con $i>k$.

$$T=\prod_{i>j_r} F_{ir}(-m_{ij_r})\cdot\ldots\cdot\prod_{i>j_1} F_{i1}(-m_{ij_1})$$

Quindi $A=T^{-1}U=LU$ dove

$$L=\prod_{i>j_1} F_{i1}(m_{ij_1})\prod_{i>j_2} F_{i2}(m_{ij_2})\cdots\prod_{i>j_r} F_{ir}(m_{ij_r})$$

TEOREMA (Fattorizzazione LU)

Sia $A\in Mat_{m\times n}$ una matrice INF. RID.
Allora $A=LU$ come sopra e

$$L=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
m_{2j_1} & 1 & 0 & & \vdots & \vdots & & \vdots\\
m_{3j_1} & m_{3j_2} & 1 & & \vdots & \vdots & & \vdots\\
m_{4j_1} & m_{4j_2} & & & \vdots & \vdots & & \vdots\\
\vdots & \vdots & & & 1 & 0 & & \vdots\\
\vdots & \vdots & & & m_{r+1,j_r} & 1 & & \vdots\\
 & \vdots & & & \vdots & 0 & \ddots & 0\\
 & & & & \vdots & \vdots & & \\
m_{mj_1} & m_{mj_2} & & & m_{m,j_r} & 0 & & 1
\end{pmatrix},\\
\begin{array}{cccccccc}1 & 2 & \cdots & & r & r+1 & \cdots & m\end{array}\end{array}$$

dim:

$$(*)\ F_{ij}(\lambda)F_{ke}(\mu) = (\mathbb{1}_m + \lambda E_{ij})(\mathbb{1}_m + \mu E_{ke})$$

$$= \mathbb{1}_m + \lambda E_{ij} + \mu E_{ke} + \lambda\mu E_{ij} E_{ke}$$

Quanto fa $E_{ij} E_{ke}$?

$$E_{ij} E_{ke} = \begin{cases} E_{ie} & \text{se } j=k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Es: $m=3$

$$F_{12}(\lambda)F_{23}(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda\mu \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nel nostro caso L è prodotto di matrici

$$L = \prod_{i>1} F_{i1}(m_{ij_1}) \prod_{i>2} F_{i2}(m_{ij_2}) \cdots$$

e quindi il risultato segue da $(*)$.

Ad esempio:

$$F_{i1}(m_{ij_1})F_{k2}(m_{kj_2}) = \mathbb{1} + m_{ij_1}E_{i1} + m_{kj_2}E_{k2}$$

Più in generale:

$$\left(F_{i_1 1}(m_1)\, F_{i_2 2}(m_2) \cdots F_{i_r r}(m_r)\right)_{kl} =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } k = l \\ m_1 & \text{se } k = i_1 \text{ e } l = 1 \\ m_2 & \text{se } k = i_2 \text{ e } l = 2 \\ \vdots & \\ m_r & \text{se } k = i_r \text{ e } l = r \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In conclusione,

$$L = \prod F_{i1}(m_{ij_1}) \cdots \prod F_{ir}(m_{ij_r})$$

$$l_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = l \\ m_{ij_s} & \text{se } k = i \text{ e } j = s \leq r \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$\square$

Es: Calcolare la dec. LU della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

Sol.:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 7 & 10 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 12 \end{pmatrix} =$$

$$= F_{21}\left(\frac{1}{2}\right) F_{31}\left(\frac{1}{2}\right) A \Rightarrow m_{21} = -\frac{1}{2}$$

$$m_{31} = -\frac{1}{2}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = F_{32}(-3)\, F_{21}\left(\frac{1}{2}\right.$$

$$= F_{32}(-3)\, F_{21}\left(\frac{1}{2}\right) F_{31}\left(\frac{1}{2}\right) A \Rightarrow m_{32} = 3$$

Quindi otteniamo

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \blacksquare$$

<u>Es</u>: Trovare la dec. LU di

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 10 & 0 & 5 \\ -3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 10 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

<u>Sol</u>:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3/5 & 1 & 0 & 0 \\ -2/5 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 10 & 0 & 5 \\ -3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 10 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} R_2 &\longmapsto R_2 + \tfrac{3}{5} R_1 \Rightarrow m_{12} = -\tfrac{3}{5} \\ R_3 &\longmapsto R_3 + \tfrac{2}{5} R_1 \Rightarrow m_{13} = -\tfrac{2}{5} \\ R_4 &\longmapsto R_4 - \tfrac{1}{5} R_1 \Rightarrow m_{14} = \tfrac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & 10 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} R_3 &\longmapsto R_3 - \tfrac{1}{2} R_2 & m_{32} &= \tfrac{1}{2} \\ R_4 &\longmapsto R_4 - R_2 & m_{42} &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & 10 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3/5 & 1 & 0 & 0 \\ -2/5 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es: Trovare la dec. LU di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -6 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Sol.:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -6 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \quad \begin{matrix} R_2 \mapsto R_2 - 2R_1 & \quad m_{21} = 2 \\ R_3 \mapsto R_3 - R_1 & \quad m_{31} = 1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \quad R_3 \mapsto R_3 - R_2 \qquad m_{32} = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

Es: Risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

Sol.: la matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -6 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

ammette decomposizione LU con

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Risolviamo prima $UX = Y$ e poi $LY = b$:

1) $UX = Y$:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = y_1 \\ 2x_2 + 3x_3 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x_3 &= y_3 \\ x_2 &= \tfrac{1}{2}(y_2 - 3x_3) = \tfrac{1}{2} y_2 - \tfrac{3}{2} y_3 \\ x_1 &= y_1 + 4\left(\tfrac{1}{2} y_2 - \tfrac{3}{2} y_3\right) - y_3 \\ &= y_1 + 2y_2 - 7y_3 \end{aligned}$$

2) $LY = b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} y_1 & = 1 \\ 2y_1 + y_2 & = 1 \\ y_1 + y_2 + y_3 & = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 1 - 2y_1 = 1 - 2 = -1$$

$$y_3 = 1 - y_1 - y_2 = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$\Rightarrow \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underset{1)}{\Longrightarrow} \quad X = \begin{pmatrix} y_1 + 2y_2 - 7y_3 \\ \frac{1}{2} y_2 - \frac{3}{2} y_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>NB</u>: $\blacksquare$

In generale, se A non è inf. riducibile allora bisogna scambiare delle righe per ottenere una matrice inf. rid. Ovvero $\forall A \in Mat_{m \times n} \; \exists P$ matrice di permutazione t.c. PA è inf. rid..

Utilizzo della decomposizione LU per il calcolo del determinante e dell'inversa.

Lun. 26.11

Sia $A \in Mat_{n\times n}$ una matrice quadrata inferiormente riducibile. Allora A ammette decomposizione

$$A = LU$$

dove

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} u_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & u_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}$$

In tal caso,

$$\det A = \det(LU) \overset{\text{Binet}}{=} \det(L)\det(U) \overset{\det L = 1}{=}$$

$$= \det U = u_{11}u_{22}\cdots u_{nn}$$

In particolare,

$$\det A \neq 0 \iff \det U \neq 0.$$

In tal caso

$$A^{-1} = U^{-1}L^{-1}.$$

Es: Calcolare l'inversa di una matrice Triangolare è piuttosto conveniente.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} d & g & i \\ 0 & e & h \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

Calcoliamo le inverse con Cramer:

$C_{11}(L) = 1 \qquad C_{21}(L) = 0 \qquad C_{31}(L) = 0$

$C_{12}(L) = -a \qquad C_{22}(L) = 1 \qquad C_{32}(L) = 0$

$C_{13}(L) = ab-c \qquad C_{23}(L) = -b \qquad C_{33}(L) = 1$

$$\Rightarrow L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ab-c & -b & 1 \end{pmatrix}$$

$C_{11}(U) = ef \qquad C_{21}(U) = -gf \qquad C_{31}(U) = gh-ei$

$C_{12}(U) = 0 \qquad C_{22}(U) = df \qquad C_{32}(U) = -dh$

$C_{13}(U) = 0 \qquad C_{23}(U) = 0 \qquad C_{33}(U) = de$

$\det U = def$. Quindi,

$$U^{-1} = \frac{1}{def} \begin{pmatrix} ef & -gf & gh-ei \\ 0 & df & -dh \\ 0 & 0 & de \end{pmatrix}$$

Es: Calcolare l'inversa di

$$A=\begin{pmatrix} 63 & 4 & 7 \\ 126 & 10 & 19 \\ 189 & 20 & 40 \end{pmatrix}$$

utilizzando la sua dec. LU.

Sol.: Cerchiamo la dec. LU di A

$$L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad U=\begin{pmatrix} 63 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 63 & 4 & 7 \\ 126 & 10 & 19 \\ 189 & 20 & 40 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 63 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 8 & 19 \end{pmatrix}$$

$$\frac{126}{63}=2, \quad \frac{189}{63}=3$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 63 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = U \qquad \det U = -126 = \det A.$$

$$L^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$U^{-1}=\frac{1}{-126}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 0 & -63 & -315 \\ 0 & 0 & 126 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/63 & -2/63 & -1/21 \\ 0 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$A^{-1} = U^{-1} L^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 1/63 & -2/63 & -1/21 \\ 0 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -10/63 & 10/63 & -1/21 \\ 23/2 & -19/2 & 5/2 \\ -5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Questo procedimento è più veloce sia dell'algoritmo di inversione che della formula di Cramer.

$\square$

Quand'è che una matrice quadrata è inferiormente riducibile?

Def: Data una matrice $A \in Mat_{m \times n}$, ed indici $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$, $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$, denotiamo con

$$A([i_1, \dots, i_k], [j_1, \dots, j_k])$$

la sottomatrice di A ottenuta considerando solo le <u>righe</u> $i_1, \dots, i_k$ e le <u>colonne</u> $j_1, \dots, j_k$.

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$

$$A([1,2],[2,5]) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A([1],[3]) = A_{13} = (3)$$

$$A([1,3],[2,4]) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 12 & 14 \end{pmatrix}$$

Comando MATLAB:

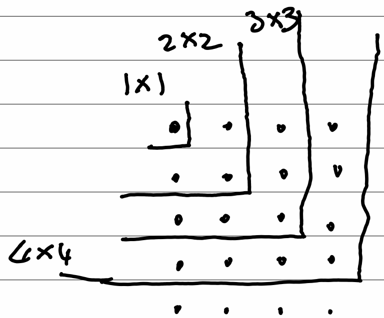
$$A([i_1, \dots, i_k], [j_1, \dots, j_k])$$

Un <u>minore di ordine k</u> di A è il determinante di una sottomatrice $k \times k$

$$\det\left(A([i_1, \dots, i_k], [j_1, \dots, j_k])\right)$$

Il <u>minore principale di ordine k</u> di A è

$$\det\left(A([1, \dots, k], [1, \dots, k])\right)$$



<u>Notazione</u> :

$$A_{(k)} := A([1, \dots, k], [1, \dots, k])$$

<u>Es</u>:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$A_{(1)} = (1)$$

$$A_{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A_{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

TEOREMA:

Una matrice invertibile $A \in Mat_{n \times n}$ ammette decomposizione LU se e solo tutti i suoi minori principali sono non-nulli se e solo se

$$rg\, A_{(k)} = k \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

dim:

Se $A = LU$, allora $A_{(k)} = L_{(k)} U_{(k)}$:

$$A = \begin{pmatrix} A_{(k)} & T \\ Z & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{(k)} & 0 \\ F & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{(k)} & G \\ 0 & H \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A_{(k)} = L_{(k)} U_{(k)}.$$

Quindi $\det A_{(k)} = \det U_{(k)} = u_{11} \cdots u_{kk} \neq 0$.

Viceversa supponiamo $\det A_{(k)} \neq 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$.

Supponiamo, per assurdo, che A non ammetta decomposizione LU, ovvero che dopo aver sistemato le prime k colonne di A con matrici elementari $F_{ij}(m_{ij})$ $(i > j)$ otteniamo una

una matrice H che ha componente $(k+1, k+1)$ uguale a zero (e quindi dobbiamo necessariamente scambiare due righe per ottenere il pivot della riga $k+1$):

$$A \rightsquigarrow H = \begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
h_{11} & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\
0 & \ddots & & & & & \\
0 & \cdots & h_{kk} & \cdots & \cdots & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \\
\vdots & & \vdots & * & \cdots & \cdots & * \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & * & \cdots & \cdots & *
\end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ k \\ k+1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\
\begin{matrix} \quad & \quad & \quad k & k+1 & \quad & \quad & \quad \end{matrix} &
\end{array}$$

Allora esiste T invertibile t.c.

$$A = TH$$

Decomponiamo a blocchi

$$A = \begin{pmatrix} A_{(k+1)} & R \\ S & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{(k+1)} & Z \\ P & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{(k+1)} & F \\ O & G \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_{(k+1)} = T_{(k+1)} H_{(k+1)}$$

$$\Rightarrow \det A_{k+1} = \det T_{(k+1)} \det H_{(k+1)} = \det T_{(k+1)}\, 0$$

Contraddizione. Quindi, ad ogni passo troviamo un pivot. $\boxtimes$