FATTORIZZAZIONE QR

Sia $A = (A^1 | \cdots | A^n) \in Mat_{m \times n}$

Applichiamo Gram-Schmidt alle colonne di A

$$F_1 = A^1$$
$$F_2 = A^2 - \alpha_{12} F_1$$
$$F_3 = A^3 - \alpha_{13} F_1 - \alpha_{23} F_2$$
$$\vdots$$
$$F_n = A^n - \alpha_{1n} F_1 - \alpha_{2n} F_2 - \cdots - \alpha_{n-1,n} F_{n-1}$$

Definiamo: $Q_0 := (F_1 | F_2 | \cdots | F_n)$

$$R_0 := \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \cdots & \alpha_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_{34} & \cdots & \alpha_{3n} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

m

dove

$$\alpha_{ji} = \begin{cases} \dfrac{A^i \cdot F_j}{F_j \cdot F_j} & \text{se } F_j \neq O_{\mathbb{R}} \\ 0 & \end{cases}$$

Allora, per costruzione,

$$\boxed{A = Q_0 R_0}$$

Adesso:

1) Cancelliamo da Q_0 le colonne nulle e le corrispettive righe di R_0 (se ad esempio $F_3 = 0_{\mathbb{R}^m}$ allora cancelliamo la 3^a colonna di Q_0 e la terza riga di R_0)

2) Dividiamo ogni colonna di Q_0 per la sua norma e moltiplichiamo la corrispondente riga di R_0 per tale norma (se ad esempio $\|F_2\| = \sqrt{2}$, allora dividiamo la 2^a colonna di Q_0 per $\sqrt{2}$ e moltiplichiamo la 2^a riga di R_0 per $\sqrt{2}$).

: Otteniamo una fattorizzazione

$$A = QR$$

in cui le colonne di Q sono ortonormali e il $\operatorname{rg} R = \#$ delle righe di R

$\Rightarrow$ ·) R ha inversa <u>destra</u>

·) $Q^t Q = \mathbb{1}_r$ dove $r = \operatorname{rg} A$

<u>Es</u>: Calcolare la fattorizzazione QR della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Sol.</u>:

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$F_1 = A^1$

$F_2 = A^2 - \alpha_{12} F_1 = A^2 - \frac{1}{2} F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$F_2 \cdot F_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = 3/2$

$F_3 = A^3 - \alpha_{13} F_1 - \alpha_{23} F_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3/2}{3/2} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$F_4 = A^4 - \alpha_{14} F_1 - \alpha_{24} F_2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{F_1 \cdot A^4}{2} F_1 - \frac{F_2 \cdot A^4}{3/2} F_2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{(-1)}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3/2}{3/2} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_0 R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$$Q' = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R' = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & \sqrt{2}/2\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & \sqrt{2}/2\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2}/2 & 5\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/\sqrt{2} & \sqrt{3}/\sqrt{2} & \sqrt{3}/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$QR = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A.$$