IL DETERMINANTE

Fissiamo $n \geq 1$ e consideriamo una funzione $f: Mat_{n \times n} \to \mathbb{K}$

Es: $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a$

$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = abcd$

$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a-c$

$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad-bc$

Quindi, f è una funzione di n^2 variabili.

Possiamo considerare f come una funzione delle righe

$$f: \underbrace{Mat_{1 \times n} \times Mat_{1 \times n} \times \dots \times Mat_{1 \times n}}_{n \text{ volte}} \to \mathbb{K}$$

oppure come funzione delle colonne

$$f: \underbrace{\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n}_{n \text{ volte}} \to \mathbb{K}$$

Es:
$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = f((a,b),(c,d))$$
$$= f\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right)$$

Definizioni:

Sia V uno spazio vettoriale, ad esempio $V = Mat_{1\times n}(\mathbb{K})$ o $V = \mathbb{K}^n$, Sia $n \geq 1$.

Una funzione $f: \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n} \to \mathbb{K}$ di n variabili vettoriali si dice

- **multilineare** se $\forall i = 1, \ldots, n$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall v, w \in V$

$$f(v_1, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{\alpha v + \beta w}, \ldots, v_n) = \alpha f(v_1, \ldots, \overset{\substack{i \\ \downarrow}}{v}, \ldots, v_n) + \beta f(v_1, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{w}, \ldots, v_n)$$

- **alternante** se

$$f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = 0 \quad \text{se } v_i = v_j.$$

Queste sono definizioni che riguardano uno spazio vettoriale V qualunque.

Se ci concentriamo al caso di funzioni di matrici otteniamo:

<u>Def</u> : Sia $n \geq 1$ e $f : Mat_{n \times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.

- f si dice <u>multilineare sulle righe</u> se f è multilineare come funzione delle righe
- f si dice <u>alternante sulle righe</u> se f è alternante come funzione delle righe
- f si dice <u>multilineare sulle colonne</u> se f è multilineare come funzione delle colonne
- f si dice <u>alternante sulle colonne</u> se f è alternante come funzione delle colonne

Esempi : $f : Mat_{2\times 2}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$

(1) $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a$

(2) $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a - c$

(3) $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a - b$

(4) $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

F.ne	Multilineare righe	Alternante righe	Multilineare colonne	Alternante colonne
(1)	NO	NO	NO	NO
(2)	NO	si	NO	NO
(3)	NO	NO	NO	si
(4)	SI	SI	SI	SI

Adesso vogliamo caratterizzare queste funzioni in termini delle matrici elementari. Abbiamo bisogno di due lemmi generali:

Lemma 1: Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e sia $n \geq 1$ un intero. Sia

$$f : V \times \dots \times V \longrightarrow \mathbb{K}$$

una funzione che cambia segno quando si scambiano due variabili, ovvero

$$f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n).$$

per ogni $i \neq j$.

Allora f è alternante.

dim:

$$f(v_1, \dots, v, \dots, v, \dots, v_n) = -f(v_1, \dots, v, \dots, v, \dots, v_n)$$

Quindi

$$f(v_1, \dots, v, \dots, v, \dots, v_n) = 0 . \qquad \blacksquare$$

oss: Il viceversa è falso. Ad esempio

$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-c)b$ è alternante sulle righe

perché $f\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = 0b = 0$ ma

$f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1$ e $f\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2 \neq -1$.

<u>Lemma 2</u> : Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e sia $n \geq 1$ un intero. Sia

$$f : V \times \ldots \times V \longrightarrow \mathbb{K}$$

una funzione <u>multilineare</u>.

Allora f è alternante se e solo se f cambia segno se si scambiano due variabili.

<u>dim</u> : Se f è alternante siano $i \neq j$ due indici. Allora

$$\begin{aligned}
0 &= f(v_1, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_n) \\
&= f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_n) + \\
&+ f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_n) = \\
&= f(v_1, \ldots, \cancel{v_i, \ldots}, v_i, \ldots, v_n) + \\
&+ f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) + \\
&+ f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + \\
&+ f(v_1, \ldots, \cancel{v_j, \ldots}, v_j, \ldots, v_n) \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Prop: Sia $f: Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$.

f è multilineare e alternante sulle righe

$$\Updownarrow$$

(R1) $f(P_{ij}A) = -f(A)$

(R2) $f(D_i(\lambda)A) = \lambda f(A)$

(R3) $f(F_{ij}(c)A) = f(A)$

$\forall i,j$, $\forall A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$, $\forall \lambda, c \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$.

dim:

$\Downarrow$) Se f è multilineare e alternante sulle righe allora f cambia segno se si scambiano due righe per il lemma 2, quindi vale (R1).

(R2) vale per la linearità nella i-esima riga. (R3) vale perché

$$f(F_{ij}(c)A) = f(A) + c\, f\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = f(A).$$

queste righe sono uguali!

$\Uparrow)$

Lemma 1: Se f ha la proprietà (R2) allora $f(A)=0$ se A ha una riga nulla

dim: Sia $A_i = 0_{1\times n}$. Allora

$$f(A) = f(A_1,\dots,A_{i-1},0,A_i,\dots,A_n) = f(D_i(-1)A)$$
$$\underset{(R2)}{=} -f(A) \qquad \Rightarrow f(A)=0. \qquad \blacksquare$$

Lemma 2: Se f ha le proprietà (R1), (R2) e (R3) allora $f(A)=0$ se le righe di A sono Lin. Dip.

dim: $x_1A_1+\dots+x_nA_n = 0_n$. Sia i t.c. $x_i \neq 0$.

allora $$A_i = -\frac{1}{x_i}\sum_{j\neq i} x_j A_j$$

$$f(A) = f\Big(A_1,\dots,A_{i-1},-\frac{1}{x_i}\sum_{j\neq i}x_jA_j, A_{i+1},\dots,A_n\Big)$$
$$= f\Big(D_i\Big(-\frac{1}{x_i}\Big)\Big(A_1,\dots,A_{i-1},\sum_{j\neq i}x_jA_j,\dots,A_n\Big)\Big)$$
$$\underset{(R2)}{=} -\frac{1}{x_i} f\Big(A_1,\dots,A_{i-1},\sum_{j\neq i}x_jA_j, A_{i+1},\dots,A_n\Big)$$
$$\underset{(R3)}{=} -\frac{1}{x_i} f\Big(F_{i1}(-x_1)F_{i2}(-x_2)\cdots F_{in}(-x_n)\Big(A_1,\dots,\sum x_jA_j,\dots,A_n\Big)\Big)$$
$$\underset{(R3)}{=} -\frac{1}{x_i} f(A_1,\dots,A_{i-1},0,A_{i+1},\dots,A_n) \underset{\text{Lemma 1}}{=} 0$$

$\blacksquare$

$\overline{\text{II}}$) Se vale (R1) allora f è alternante sulle righe per il lemma 1. Facciamo vedere che (R2) + (R3) implicano che f è multilineare sulle righe:

$$f\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \lambda A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = f(D_i(\lambda)A) = \lambda f(A) = \lambda f\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

quindi f preserva il prodotto per scalari in ogni riga. Vediamo che f preserva la somma.

Dimostriamo quindi che

$$f\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ B+C \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ C \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

($B+C$, B e C si trovano sulla stessa riga i).

Usando (R1) e (R2) possiamo assumere che $i=1$. Quindi dimostriamo che

$$f\begin{pmatrix} B+C \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} B \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} C \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

Se $B \in \mathrm{Span}(A_2, \dots, A_n)$ allora

$$B = \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_n A_n$$

e moltiplindo per $F_{12}(-\alpha_2) F_{13}(-\alpha_3) \cdots F_{1n}(\alpha_n)$ si ha

$$f\begin{pmatrix} B+C \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} C \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \quad e \quad f\begin{pmatrix} B \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = 0.$$

Se $C \in \mathrm{Span}(A_2, \dots, A_n)$ per lo stesso ragionamento

$$f\begin{pmatrix} B+C \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} B \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \quad e \quad f\begin{pmatrix} C \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = 0 .$$

Supponiamo quindi che $B, C \notin \operatorname{Span}(A_2, \dots, A_n)$.

Se c'è una riga A_i che è combinazione lineare di $B+C$ e delle altre righe, allora

$$f\begin{pmatrix} B+C \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = 0 .$$

per il lemma 2. Inoltre se $A_i = \alpha_1(B+C) + \sum_{j\neq i} \alpha_j A_j$,

$$\alpha_1 B = A_i - \alpha_1 C - \sum_{j \neq i} \alpha_j A_j .$$

Se $\alpha_1 \neq 0$, otteniamo

$$f\begin{pmatrix} B \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha_i} f\begin{pmatrix} \alpha_i B \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha_i} f\begin{pmatrix} -\alpha_i C \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = -f\begin{pmatrix} C \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

Se $\alpha_1 = 0$ otteniamo per il lemma 2

$$f\begin{pmatrix} B \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} C \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = 0 .$$

Discutiamo adesso l'ultimo caso, quello in cui $\{B+C, A_2, \dots, A_n\}$ è linearmente indipendente e quindi una base di $Mat_{1\times n}(\mathbb{K})$. Quindi esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$:

$$B = \alpha_1 (B+C) + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_n A_n$$

$$C = \beta_1 (B+C) + \beta_2 A_2 + \dots + \beta_n A_n$$

Poiché $B, C \notin Span(A_2, \dots, A_n)$ per ipotesi, $\alpha_1 \neq 0$ e $\beta_1 \neq 0$.

$$B+C = (\alpha_1+\beta_1)(B+C) + (\alpha_2+\beta_2) A_2 + \dots + (\alpha_n+\beta_n) A_n$$

Da cui otteniamo

$$\alpha_1+\beta_1 = 1, \ \alpha_2+\beta_2 = 0, \dots, \alpha_n+\beta_n = 0$$

$$f\begin{pmatrix} B+C \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = (\alpha_1+\beta_1) f\begin{pmatrix} B+C \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \alpha_1 f\begin{pmatrix} B+C \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \beta_1 f\begin{pmatrix} B+C \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

$$= f\begin{pmatrix} \alpha_1 (B+C) \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} \beta_1 (B+C) \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} B \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} C \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 C = (1-\alpha_1) B - \alpha_2 A_2 - \dots - \alpha_n A_n$$
$$\beta_1 B = (1-\beta_1) C - \beta_2 A_2 - \dots - \beta_n A_n$$

$\boxtimes$

Prop: Sia $g: Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.

g è multilineare e alternante sulle colonne

$$\Updownarrow$$

(C1) $g(AP_{ij}) = -g(A)$

(C2) $g(A\,D_i(\lambda)) = \lambda\, g(A)$

(C3) $g(A\,F_{ji}(c)) = g(A)$

$\forall\, i,j$, $\forall A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$, $\forall \lambda, c \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$.

dim: Consideriamo la funzione

$f: Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ definita come

$$f(A) := g(A^t).$$

È facile vedere (Esercizio!) che g soddisfa (C1), (C2) e (C3) se e solo se f soddisfa (R1), (R2) e (R3). Per la proposizione precedente questo è equivalente a dire che f è multilineare ed alternante sulle righe. Rimane da dimostrare che se g è multilineare e alternante sulle colonne allora f è multilineare e alternante sulle righe: si ha

$$\cdot)\ f\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ v \\ \vdots \\ v \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = g(A_1^t, \dots, v^t, \dots, v^t, \dots, A_n^t) = 0$$

$$\cdot)\ f\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \alpha A + \beta B \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = g(A_1^t, \dots, (\alpha A + \beta B)^t, \dots, A_n^t) =$$

$$= g(A_1^t, \dots, \alpha A^t + \beta B^t, \dots, A_n^t) =$$

$$= \alpha g(A_1^t, \dots, A^t, \dots, A_n^t) + \beta g(A_1^t, \dots, B^t, \dots, A_n^t)$$

$$= \alpha f\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \beta f\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \qquad \blacksquare$$

Teorema / Definizione

Esiste un'unica funzione $f: Mat_{n \times n} \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

(D1) f è alternante sulle righe

(D2) f è multilineare sulle righe

(D3) $f(\mathbb{1}_n) = 1$.

Tale funzione si chiama <u>determinante</u> e si denota con det.

<u>dim</u>:

Per la proposizione le condizioni (D1) e (D2) sono equivalenti a (R1), (R2), (R3).

Dimostriamo che esiste una funzione con queste proprietà esibendone una:

Per ogni $n \geq 1$ definiamo una funzione $d^{(n)} : Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ "induttivamente".

Per farlo abbiamo bisogno della seguente notazione

<u>Notazione</u>: Sia $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$. Sia $k \in \{1, \dots, n\}$ un indice di riga. Denotiamo con A_{k1} la matrice ottenuta da A rimuovendo la riga k e la colonna 1.

<u>Es</u>:

•) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad A_{11} = (d) \quad A_{21} = (b)$

•) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad A_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$

$A_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$

$A_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Def: Per ogni $n \geq 1$ definiamo la f.ne

$$d^{(n)} : Mat_{n \times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

come segue

$d^{(1)} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ è l'identità

e per $n \geq 2$

$$d^{(n)}(A) = a_{11}\, d^{(n-1)}(A_{11}) - a_{21}\, d^{(n-1)}(A_{2,1}) + a_{31}\, d^{(n-1)}(A_{3,1}) - a_{41}\, d^{(n-1)}(A_{4,1}) + \dots$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1}\, d^{(n-1)}(A_{k,1})$$

Es: $d^{(1)}((2)) = 2$

$$d^{(2)}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = ad - cb$$

$$d^{(3)}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = d^{(2)}\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - 2\, d^{(2)}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + 7 d^{(2)}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= -12 + 12 + 0 = 0$$

(osserviamo che la seconda riga è il doppio della prima)

Teorema (Esistenza del determinante)
Per ogni $n \geq 1$, la funzione
$$d^{(n)} : Mat_{n \times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$
è multilineare sulle righe, alternante sulle righe e $d^{(n)}(\mathbb{1}_n) = 1$.

dim:
Per $n=1$, $d^{(1)}$ è l'identità quindi ha le proprietà richieste.
Supponiamo che $d^{(n-1)}$ abbia le proprietà richieste e dimostriamo che allora anche $d^{(n)}$ le ha.
(R1) Siano $1 \leq i < j \leq n$ due indici di riga.
Facciamo vedere che
$$d^{(n)}(P_{ij}A) = -d^{(n)}(A)$$
per qualunque matrice $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$.

$$d^{(n)}(P_{ij}A) = \sum_{K=1}^{i-1} (-1)^{K+1} a_{K1}\, d^{(n-1)}\left((P_{ij}A)_{K,1}\right) +$$

$$+ (-1)^{i+1} a_{j1}\, d^{(n-1)} \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} \bar{A}_1 \\ \vdots \\ \bar{A}_{i-1} \\ \bar{A}_{i+1} \\ \vdots \\ \bar{A}_i \\ \vdots \\ \bar{A}_n \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{riga } i \\ \\ \leftarrow \text{riga } j-1 \\ \\ \\ \end{array} \end{array} +$$

$$+ \sum_{K=i+1}^{j-1} (-1)^{K+1} a_{K1}\, d^{(n-1)}\left(P_{i,j-1} A_{K,1}\right) +$$

$$+ (-1)^{j+1} a_{i1}\, d^{(n-1)} \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} \bar{A}_1 \\ \vdots \\ \bar{A}_j \\ \vdots \\ \bar{A}_{j-1} \\ \bar{A}_{j+1} \\ \vdots \\ \bar{A}_n \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{riga } i \\ \\ \\ \leftarrow \text{riga } j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$+ \sum_{K=j+1}^{n} (-1)^{K+1} a_{K,1}\, d^{(n-1)}\left((P_{ij}A)_{K,1}\right)$$

dove

$\bar{A}_K = (a_{K2}, \ldots, a_{Kn})$ "A_K senza la 1ª colonna".

Occupiamoci del sommando i-esimo:

$$S_i := (-1)^{i+1} a_{j1} \, d^{(n-1)} \begin{pmatrix} \bar{A}_1 \\ \vdots \\ \bar{A}_{i-1} \\ \bar{A}_{i+1} \\ \vdots \\ \bar{A}_i \\ \vdots \\ \bar{A}_n \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{riga } i \\ \\ \leftarrow \text{riga } j-1 \\ \\ \\ \end{array}$$

Dobbiamo "portare" A_i nella riga i lasciando la posizione reciproca delle altre righe invariata:

scambiamo la riga $j-1$ con la riga $j-2$

poi scambiamo la riga $j-2$ con la riga $j-3$

e così via fino a

scambiare la riga $i+1$ con la riga i

Quanti scambi abbiamo fatto?

Risposta: $(j-1)-i$

Alla fine di questo procedimento otteniamo $A_{j,1}$. Quindi

$$S_i = (-1)^{i+1}(-1)^{j-i-1} a_{j1}\, d^{(n-1)}(A_{j,1}) =$$

$$= -(-1)^{j+1} a_{j1}\, d^{(n-1)}(A_{j,1}).$$

Similmente, il sommando j-esimo

$$S_j = -(-1)^{i+1} a_{i1}\, d^{(n-1)} \begin{pmatrix} \bar{A}_1 \\ \vdots \\ \bar{A}_j \\ \vdots \\ \bar{A}_{j-1} \\ \bar{A}_{j+1} \\ \vdots \\ \bar{A}_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{riga } i \\ \\ \leftarrow \text{riga } j-1 \\ \leftarrow \text{riga } j \\ \\ \\ \end{matrix}$$

è uguale a

$$S_j = (-1)^{j+1}(-1)^{j-i} a_{i1}\, d^{(n-1)}(A_{i,1})$$

$$= (-1)^{2j-i+1} a_{i1}\, d^{(n-1)}(A_{i,1})$$

$$= (-1)^{-i+1} a_{i1}\, d^{(n-1)}(A_{i,1}) =$$

$$= -(-1)^{i+1} a_{i1}\, d^{(n-1)}(A_{i,1})$$

Gli altri sommandi si analizzano facilmente ed usando la proprietà (R1) per $d^{(n-1)}$ otteniamo

$$d^{(n)}(P_{ij}A) = -d^{(n)}(A).$$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad P_{12}A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

$$d^{(3)}(P_{12}A) = 4d^{(2)}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - d^{(2)}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + 7d^{(2)}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= -\left[d^{(2)}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - 4d^{(2)}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + 7d^{(2)}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\right]$$

$$= -d^{(3)}(A).$$

Dimostriamo adesso che $d^{(n)}$ è multilineare sulle righe:

Sia $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ una matrice $n \times n$ e supponiamo che una riga di A sia una combinazione lineare di due matrici riga, diciamo

$$A_i = \alpha A_i' + \beta A_i''$$

per qualche $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $A_i', A_i'' \in Mat_{1\times n}(\mathbb{K})$.

Dimostriamo che

$$d^{(n)}(A) = \alpha\, d^{(n)}(A') + \beta\, d^{(n)}(A'')$$

dove

$$A' = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i' \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{riga } i \\ \\ \\ \end{array}, \quad A'' = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i'' \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{riga } i \\ \\ \\ \end{array} \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K}).$$

Ad esempio

$$d^{(3)}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 2\, d^{(3)}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + d^{(3)}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Si ha

$$d^{(n)}(A) = \sum_{k \neq i} (-1)^{k+1} a_{k1}\, d^{(n-1)}(A_{k,1}) +$$
$$+ (-1)^{i+1} (\alpha a'_{k1} + \beta a''_{k1})\, d^{(n-1)}(A_{i,1})$$

osserviamo che $A_{k,1}$, se $k \neq i$, ha una riga che è ottenuta da $\alpha A'_i + \beta A''_i$ togliendo la prima colonna. Quindi, dato che $d^{(n-1)}$ è lineare in questa riga, otteniamo

$$d^{(n-1)}(A_{k,1}) = \alpha\, d^{(n-1)}(A'_{k1}) + \beta\, d^{(n-1)}(A''_{k,1}).$$

Sostituendo, otteniamo

$$d^{(n)}(A) = \sum_{k \neq i} (-1)^{k+1} a_{k1} \left[\alpha d^{(n-1)}(A') + \beta d^{(n-1)}(A'')\right]$$
$$+ (-1)^{i+1} (\alpha a'_{i1} + \beta a''_{i1})\, d^{(n-1)}(A_{i,1})$$
$$= \alpha \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a'_{k1}\, d^{(n-1)}(A'_{k1}) + \beta \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a''_{k1}\, d^{(n-1)}(A''_{k1})$$
$$= \alpha\, d^{(n)}(A') + \beta\, d^{(n)}(A'') \qquad \blacksquare$$

Dimostriamo adesso che

$$d^{(n)}(\mathbb{1}_n) = 1$$

sapendo che $d^{(n-1)}(\mathbb{1}_{n-1}) = 1$:

$$d^{(n)}(\mathbb{1}_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} (\mathbb{1}_n)_k^1 \, d^{(n-1)}((\mathbb{1}_n)_{k1})$$

Dato che $(\mathbb{1}_n)_k^1 = \begin{cases} 1 & \text{se } k=1 \\ 0 & \text{se } k \neq 1 \end{cases}$

e che $(\mathbb{1}_n)_{1,1} = \mathbb{1}_{n-1}$ otteniamo

$$d^{(n)}(\mathbb{1}_n) = d^{(n-1)}(\mathbb{1}_{n-1}) = 1.$$

<u>Es</u>:

$$d^{(3)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = d^{(2)}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 0\, d^{(2)}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ 0\, d^{(2)}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= d^{(2)}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Teorema / Definizione

Esiste un'unica funzione $f: Mat_{n\times n} \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

(D1) f è alternante sulle righe

(D2) f è multilineare sulle righe

(D3) $f(\mathbb{1}_n) = 1$.

Tale funzione si chiamo <u>determinante</u> e si denota con det.

<u>dim</u>: Abbiamo già dimostrato che la funzione $d^{(n)}$ ha queste proprietà, per cui esiste almeno una tale funzione f. Dimostriamo che f è unica.

Sia $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$. Consideriamo matrici elementari $E_1, \dots, E_k$ t.c. $E_k \cdots E_1 A = rref(A)$.

$\Rightarrow A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}\, rref(A)$

$\Rightarrow f(A) = c\, f(rref(A))$ per un opportuno scalare c che dipende da $E_1, \dots, E_k$.

Per una matrice a scala ridotta U_0 quadrata ci sono 2 possibilità:

1) U_0 ha una riga nulla
2) $U_0 = \mathbb{1}_n$.

Quindi:

$$f(U_0) = \begin{cases} 0 & \text{se } U_0 \text{ ha una riga nulla} \\ 1 & \text{se } U_0 = \mathbb{1}_n \end{cases}$$

Otteniamo:

$$f(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } \operatorname{rg} A < n \\ c & \text{se } \operatorname{rg} A = n \end{cases}$$

Quindi se f esiste è unica ☒

<u>OSS</u>: ·) $\det(D_i(\lambda)) = \det(D_i(\lambda)\mathbb{1}_n) = \lambda \det(\mathbb{1}_n) = \lambda$

·) $\det(F_{ij}(\lambda)) = \det(F_{ij}(\lambda)\mathbb{1}_n) = \det(\mathbb{1}_n) = 1$

·) $\det(P_{ij}) = \det(P_{ij}\mathbb{1}_n) = -\det(\mathbb{1}_n) = -1$

In particolare, $\boxed{\det(EA) = \det E \det A}$ per ogni matrice elementare E.

Il motivo per cui siamo interessati al determinante è fondamentalmente il seguente:

<u>COR</u>: Data $A \in Mat_{n \times n}$:

$$\det A \neq 0 \iff rg\, A = n \iff \mathrm{Ker}\, A = \{0\} \iff A \text{ invertibile}$$

Calcolare il determinante è computazionalmente complesso. Vediamo di sviluppare alcune tecniche di calcolo. La prima l'abbiamo già vista:

<u>Calcolo del determinante mediante Gauss</u>

Si tratta di ridurre una matrice a scala e calcolare la variazione del determinante ad ogni passaggio.

Vediamo qual'è il determinante di una matrice a scala, in maniera da ridurre il numero di passaggi:

Prop: Se A è una matrice quadrata $n \times n$ a scala allora

$$\boxed{\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}} \qquad (*)$$

ovvero il determinante è il prodotto degli elementi diagonali.

dim: Sappiamo che $\mathrm{rg}\, A$ è uguale al numero di elementi diagonali non-nulli.

Quindi, $\det A = 0 \iff \exists i : a_{ii} = 0$. In questo caso la formula $(*)$ diventa $0=0$.

Supponiamo che A sia invertibile, e quindi $a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \neq 0$. Possiamo dividere ogni riga di A per il corrispondente pivot ed ottenere una matrice U a scala che abbia 1 sulla diagonale principale:

$$A \rightsquigarrow D_1\left(\frac{1}{a_1}\right) D_2\left(\frac{1}{a_2}\right) \cdots D_n\left(\frac{1}{a_n}\right) A = U$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & 0 & \ddots & * \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi,

$$A = D_1(a_1) D_2(a_2) \cdots D_n(a_n) U$$

ne segue

$$\det A = \det(D_1(a_1)) \det(D_2(a_2)) \cdots \det(D_n(a_n)) \det U$$
$$= a_1 a_2 \cdots a_n \det U.$$

Rimane quindi da dimostrare che $\det U = 1$.

Questo segue dal fatto che

$$U \rightsquigarrow \mathbb{1}_n$$

Tramite operazioni elementari $F_{ij}(\lambda)$

che non cambiano il determinante

$\blacksquare$

Es: Calcolare il determinante di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol.:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = -6$$

$\blacksquare$

Es: Calcolare il determinante di

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Sol.:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 7 - \frac{15}{2} = -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} = -1.$$

OSS: $\det D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right) A = \frac{1}{\lambda} \det A$

$\Rightarrow \det A = \lambda \cdot \det \left(D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right) A \right)$

Es: Calcolare il determinante della seguente matrice complessa

$$A=\begin{pmatrix} 1-i & i & 1+i \\ 3-2i & 3i & 8+2i \\ 2-2i & 2i & 4+3i \end{pmatrix}$$

Sol.:

$$\det A=\det\begin{pmatrix} 1-i & i & 1+i \\ 3-2i & 3i & 8+2i \\ 2-2i & 2i & 4+3i \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} 1-i & i & 1+i \\ 1 & i & 4-i \\ 2-2i & 2i & 4+3i \end{pmatrix}$$

$$=-\det\begin{pmatrix} 1 & i & 4-i \\ 1-i & i & 1+i \\ 2-2i & 2i & 4+3i \end{pmatrix}=-\det\begin{pmatrix} 1 & i & 4-i \\ 0 & -1 & -2+6i \\ 0 & -2 & -2+13i \end{pmatrix}$$

$$=\det\begin{pmatrix} 1 & i & 4-i \\ 0 & 1 & 2-6i \\ 0 & -2 & -2+13i \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} 1 & i & 4-i \\ 0 & 1 & 2-6i \\ 0 & 0 & 2+i \end{pmatrix}=2+i$$

· <u>OSS</u>: $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

Infatti, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\det A = d^{(2)} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Def}}{=} a\, d^{(1)}(A_{11}) - c\, d^{(1)}(A_{21})$$

$$= a\, d^{(1)}(d) - c\, d^{(1)}(b)$$

$$= ad - bc.$$

$\blacksquare$

<u>Es</u>: $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 6 = -2.$

Per calcolare il determinante possiamo operare anche sulle <u>colonne</u>.

Vediamo perché.

Cominciamo con il seguente importante risultato:

COR (del teorema di esistenza ed unicità)

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n e sia $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ una sua base. Allora esiste un'unica funzione

$$f : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n = \dim V} \longrightarrow \mathbb{K}$$

multilineare, alternante e tale che

$$f(v_1, \dots, v_n) = 1.$$

dim:

Esistenza: Definiamo

$$\boxed{f(w_1, \dots, w_n) := \det\left(F_{\mathcal{B}}(w_1)^t, \dots, F_{\mathcal{B}}(w_n)^t \right).} \quad (*)$$

Dimostriamo che questa funzione ha le proprietà richieste:

1) f è multilineare:

$$f(-, \alpha u + \beta w, -) = \det(-, F_{\mathcal{B}}(\alpha u + \beta w)^t, -)$$

$F_{\mathcal{B}}$ e ^{t} sono lineari

$$= \det(-, \alpha F_{\mathcal{B}}(u)^t + \beta F_{\mathcal{B}}(w)^t, -)$$

det è multilineare

$$= \alpha \det(-, F_{\mathcal{B}}(u), -) + \beta \det(-, F_{\mathcal{B}}(w), -) =$$

$$= \alpha f(-, u, -) + \beta f(-, w, -).$$

2) f è alternante:

$$f(-, w, -, w, -) = \det(-, F_{\mathcal{B}}(w)^t, -, F_{\mathcal{B}}(w)^t, -) \overset{\text{det è alternante}}{=} 0$$

3) $f(v_1, \dots, v_n) = \det(F_{\mathcal{B}}(v_1)^t, \dots, F_{\mathcal{B}}(v_n)^t)$

$$= \det(e_1^t, \dots, e_n^t)$$

$$= \det(\mathbb{1}_n) = 1$$

<u>Unicità</u>: Sia $g: V \times \dots \times V \to \mathbb{K}$ una funzione multilineare, alternante e tale che $g(v_1, \dots, v_n) = 1$.

Definiamo $g': \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ come

$$g'(X_1, \dots, X_n) = g(F_{\mathcal{B}}^{-1}(X_1^t), \dots, F_{\mathcal{B}}^{-1}(X_n^t))$$

per ogni $X_1, \dots, X_n \in \mathrm{Mat}_{1 \times n}(\mathbb{K})$.

g' è multilineare e alternante poiché g lo è (Esercizio!). Inoltre

$$g'(\mathbb{1}_n) = g(v_1, \dots, v_n) = 1.$$

Quindi, per l'unicità del determinante,

$$g'(X_1, \dots, X_n) = \det(X_1, \dots, X_n).$$

Otteniamo, $\forall w_1, \dots, w_n \in V$,

$$g(w_1, \dots, w_n) = g'(F_{\mathcal{B}}(w_1)^t, \dots, F_{\mathcal{B}}(w_n)^t)$$
$$= \det(F_{\mathcal{B}}(w_1)^t, \dots, F_{\mathcal{B}}(w_n)^t)$$
$$= f(w_1, \dots, w_n).$$

$\boxtimes$

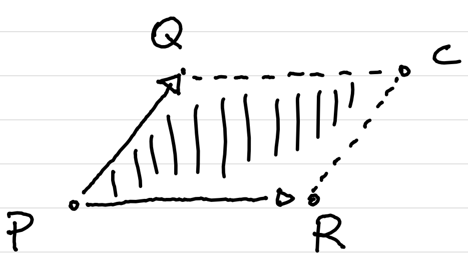
OSS: La funzione f definita nel corollario si chiama determinante di V rispetto alla base $\mathcal{B}$.
Vedremo come cambia questa funzione al variare della base $\mathcal{B}$.

Vediamo adesso un'interessante applicazione geometrica di questo corollario:

Il determinante 2x2 come area orientata

Sia $V = V_0^2 = \{ \vec{OP} \mid P \in \mathcal{E}^2 \}$ lo spazio vettoriale reale dei vettori geometrici del piano.

Dati due vettori geometrici applicati ad uno stesso punto P, diciamo $\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$ e $\vec{PR} = \vec{OR} - \vec{OP}$ il parallelogramma da essi generato lo denotiamo con $\mathcal{P}(\vec{PQ}, \vec{PR})$

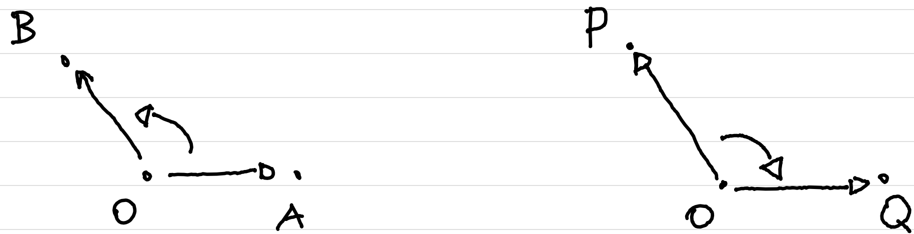


$= \mathcal{P}(\vec{PQ}, \vec{PR})$

(C è l'unico punto t.c. $\vec{PC} = \vec{PQ} + \vec{PR}$)

Def: Due coppie ordinate di vettori geometrici $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ e $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$ non allineati (quindi due basi di V_O^2) si dicono *concordi* se l'angolo acuto $(0 < \theta < \pi)$ compreso viene spazzato nello stesso verso (orario o anti-orario) da $\overrightarrow{OA}$ a $\overrightarrow{OB}$ e da $\overrightarrow{OC}$ a $\overrightarrow{OD}$. altrimenti si dicono *discordi*

concordi



discordi

Teorema (det 2x2 come area orientata)

Sia $\mathcal{B}$ una base unitaria di V_O^2.

Dati due vettori geometrici $\vec{OP}, \vec{OQ}$ si ha

$$\text{Area}\left(P(\vec{OP},\vec{OQ})\right) = \left|\det\left(F_{\mathcal{B}}(\vec{OP}), F_{\mathcal{B}}(\vec{OQ})\right)\right|$$

dim: Consideriamo la seguente funzione

$$\mathcal{A} : V_O^2 \times V_O^2 \to \mathbb{R}$$

definita come

$$\mathcal{A}(\vec{OP},\vec{OQ}) = \begin{cases} \text{Area}\left(P(\vec{OP},\vec{OQ})\right) & \text{se } (\vec{OP},\vec{OQ}) \text{ e } \mathcal{B} \text{ sono concordi} \\ -\text{Area}\left(P(\vec{OP},\vec{OQ})\right) & \text{se } (\vec{OP},\vec{OQ}) \text{ e } \mathcal{B} \text{ sono discordi} \\ 0 & \text{se } \vec{OP} \text{ e } \vec{OQ} \text{ sono allineati} \end{cases}$$

Dimostriamo che $\mathcal{A}$ è multilineare, alternante e vale 1 su $\mathcal{B}$. Una volta dimostrato questo, il Teorema precedente ci assicura che

$$\mathcal{A}(\vec{OP},\vec{OQ}) = \det\left(F_{\mathcal{B}}(\vec{OP}), F_{\mathcal{B}}(\vec{OQ})\right)$$

e quindi conclude la dimostrazione.

$\mathcal{A}$ è multilineare e alternante:

lo stesso argomento usato nel caso $V = Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ ci assicura (Esercizio!) che basta far vedere

1) $\mathcal{A}(\vec{OP}, \vec{OQ}) = -\mathcal{A}(\vec{OQ}, \vec{OP})$

2) $\mathcal{A}(\lambda\vec{OP}, \vec{OQ}) = \lambda\mathcal{A}(\vec{OP}, \vec{OQ})$

3) $\mathcal{A}(\vec{OP} + c\vec{OQ}, \vec{OQ}) = \mathcal{A}(\vec{OP}, \vec{OQ})$

$\forall\, \vec{OP}, \vec{OQ} \in \mathcal{V}_O^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$, $\forall c \in \mathbb{R}$.

Se $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ sono allineati queste tre uguaglianze sono trivialmente vere.

Assumiamo quindi che $(\vec{OP}, \vec{OQ})$ sia una base di $\mathcal{V}_O^2$. Osserviamo che se $(\vec{OP}, \vec{OQ})$ è concorde con $\mathcal{B}$ allora $(\vec{OQ}, \vec{OP})$ è discorde con $\mathcal{B}$. Quindi 1) vale.

Supponiamo da adesso in poi che $(\vec{OP}, \vec{OQ})$ sia <u>concorde</u> con $\mathcal{B}$.

2) Sia $\lambda > 0$. Allora $(\lambda\vec{OP}, \vec{OQ})$ è ancora concorde con $\mathcal{B}$. Quindi, per definizione,

$$\mathcal{A}(\lambda\vec{OP},\vec{OQ}) = \text{Area } \mathcal{P}(\lambda\vec{OP},\vec{OQ}) =$$

Area $\mathcal{P}$ = base x altezza $\rightarrow$

$$= \lambda \text{ Area } \mathcal{P}(\vec{OP},\vec{OQ})$$

$$= \lambda\, \mathcal{A}(\vec{OP},\vec{OQ}).$$

Se $\lambda < 0$, allora $(\lambda\vec{OP},\vec{OQ})$ è discorde con $\mathcal{B}$

quindi

$$\mathcal{A}(\lambda\vec{OP},\vec{OQ}) = -\text{Area}\,(\mathcal{P}(\lambda\vec{OP},\vec{OQ}))$$

Area $\mathcal{P}$ = base x altezza $\rightarrow$

base $= |\lambda|\,|\vec{OP}|$

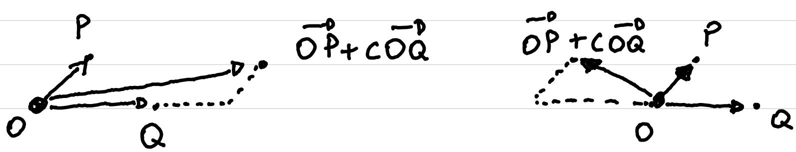
$$= -|\lambda| \text{ Area } \mathcal{P}(\vec{OP},\vec{OQ})$$

$$= -|\lambda|\, \mathcal{A}(\vec{OP},\vec{OQ})$$

$$= \lambda\, \mathcal{A}(\vec{OP},\vec{OQ}).$$

3) Sia $c \in \mathbb{R}$. Se $c=0$ non c'è niente da dimostrare.

Supponiamo $c \neq 0$.



se $c>0$ Se $c<0$

Notiamo che $(\vec{OP}+c\vec{OQ},\vec{OQ})$ è concorde con $\mathcal{B}$ per ogni $c \in \mathbb{R}$. Inoltre l'altezza di $\mathcal{P}(\vec{OP}+c\vec{OQ},\vec{OQ})$ relativa alla base $\vec{OQ}$ è uguale all'altezza di $\mathcal{P}(\vec{OP},\vec{OQ})$ relativa a $\vec{OQ}$. Concludiamo che vale 3. $\blacksquare$

OSS: Se $\mathcal{B}$ non è unitaria, ovvero se in qualche unità di misura Area $\mathcal{P}(\mathcal{B}) = a$ allora

$$\text{Area } \mathcal{P}(\vec{OP}, \vec{OQ}) = a \left| \det\left(F_{\mathcal{B}}(\vec{OP}), F_{\mathcal{B}}(\vec{OQ})\right) \right|$$

Infatti, in questo caso la funzione $\frac{1}{a}\mathcal{A}$ è multilineare, alternante e vale 1 su $\mathcal{B}$.

Quindi $\frac{1}{a}\mathcal{A}(\vec{OP}, \vec{OQ}) = \det\left(F_{\mathcal{B}}(\vec{OP}), F_{\mathcal{B}}(\vec{OQ})\right)$.

Aver richiesto che $\mathcal{B}$ è unitaria è quindi privo di sostanziale importanza.

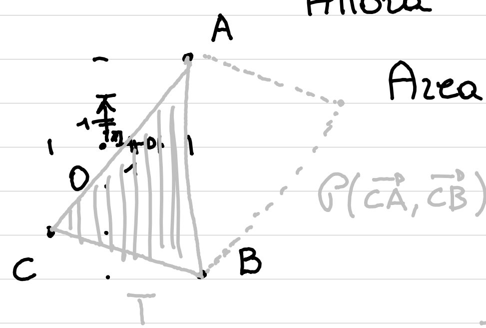
<u>Es</u>: Sia $\mathcal{B}$ una base unitaria.

Siano $A, B, C \in \mathcal{E}^2$ tre punti del piano t.c.

$$F_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OA}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad F_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OB}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad F_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OC}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Calcolare l'area del triangolo di vertici A, B e C.

<u>Sol.</u>: Sia T il triangolo di vertici A, B, C. Allora



$$\text{Area } T = \frac{1}{2} \text{Area } \mathcal{P}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$$

Per il teorema

$$\text{Area } \mathcal{P}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \left| \det \left(\overset{\overrightarrow{CA}}{\overset{\parallel}{F_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC})^t}}, \overset{\overrightarrow{CB}}{\overset{\parallel}{F_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})^t}} \right) \right|$$

$$= \left| \det \left(F_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OA})^t - F_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OC})^t, F_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OB})^t - F_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OC})^t \right) \right|$$

$$= \left| \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \right| = |-3-12| = 15$$

$$\Rightarrow \text{Area}(T) = \frac{15}{2}.$$

Teorema (di Binet o del prodotto)

Date $A, B \in Mat_{n\times n}$ si ha

$$\boxed{\det(AB) = \det A \det B}$$

dim:

Sappiamo che AB è invertibile se e solo se A è invertibile e B è invertibile

Quindi $\det(AB) = 0 \iff \det A \det B = 0$.
ed il Teorema vale se AB non è invertibile.
Supponiamo quindi AB sia invertibile. Ovvero sia A che B sono invertibili.
Dimostriamo il teorema di Binet in due modi diversi, entrambi interessanti:

<u>Dimostrazione 1</u>: A e B sono prodotto di matrici elementari, quindi esistono matrici elementari $E_1, \dots, E_k, F_1, \dots, F_t$ tali che $A = E_1 \cdots E_k$ e $B = F_1 \cdots F_t$.

Quindi:

$$
\begin{aligned}
\det(AB) &= \det(E_1 \cdots E_k F_1 \cdots F_t) \\
&= \det(E_1) \cdots \det(E_k) \det(F_1) \cdots \det(F_t) \\
&= \det(E_1 \cdots E_k) \det(F_1 \cdots F_t) \\
&= \det A \det B. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

$\det(EA) = \det E \det A$ $\forall E$ elementare e $\forall A$

<u>Dimostrazione 2</u>: Definiamo la funzione $f: Mat_{n \times n} \to \mathbb{R}$ come $f(A) = \dfrac{\det(AB)}{\det(B)}$

È ben definita, poiché $\det B \neq 0$. Dimostriamo che $f(A) = \det(A)$:

(D1): $f(P_{ij}A) = \dfrac{\det(P_{ij}AB)}{\det B} = -\dfrac{\det(AB)}{\det B} = -f(A)$

(D2): $f(D_i(\lambda)A) = \dfrac{\det(D_i(\lambda)AB)}{\det B} = \lambda \dfrac{\det(AB)}{\det B} = \lambda f(A)$

$f(E_{ij}(\lambda)A) = f(A)$

(D3): $f(\mathbb{1}) = \dfrac{\det B}{\det B} = 1$. $\blacksquare$

COR1: $\det(AB) = \det(BA)$
(anche se $AB \neq BA$)

COR2: A invertibile $\Rightarrow \det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Il Teorema di Binet si può formulare dicendo che il determinante è moltiplicativo.
Nella dimostrazione del Teorema abbiamo usato la moltiplicatività del determinante sulle matrici elementari

$$\det(E_1 \cdots E_k) = \det E_1 \det E_2 \cdots \det E_k.$$

(Questo segue dalla definizione).
Vediamo un'altra importante conseguenza di questo:

__Teorema__: $\det(A^t) = \det(A)$

__dim__: Dimostriamo prima il teorema nel caso delle matrici elementari. Vediamo quindi qual'è la trasposta di una matrice elementare:

i) $(P_{ij})^t = P_{ij}$

i) $(D_i(\lambda))^t = D_i(\lambda)$

i) $(F_{ij}(\lambda))^t = F_{ji}(\lambda)$

Da questo segue che $\det(E^t) = \det(E)$ per qualunque matrice elementare E.

Dimostriamo adesso il Teorema per una matrice quadrata qualunque A.

Dato che $\mathrm{rg}\, A^t = \mathrm{rg}\, A$, sappiamo che A è invertibile se e solo se A^t è invertibile.

Quindi, $\det A = 0 \Leftrightarrow \det A^t = 0$.

Supponiamo quindi che A e A^t siano invertibili. Allora A è prodotto di matrici elementari

$$A = E_1 E_2 \cdots E_k$$

e quindi

$$A^t = E_k^t \cdots E_2^t E_1^t .$$

Dalla moltiplicatività del determinante sulle matrici elementari e del fatto che $\det(E^t) = \det E$ per ogni matrice elementare, otteniamo:

$$\begin{aligned}
\det A^t &= \det E_k^t \det E_{k-1}^t \cdots \det E_2^t \det E_1^t \\
&= \det E_k \det E_{k-1} \cdots \det E_2 \det E_1 \\
&= \det E_1 \det E_2 \cdots \det E_{k-1} \det E_k \\
&= \det(E_1 E_2 \cdots E_{k-1} E_k) = \det A.
\end{aligned}$$

come volevasi dimostrare.

$\blacksquare$

COR: Esiste un'unica funzione $g: Mat_{n\times n} \to \mathbb{R}$ che è alternante sulle colonne, multilineare sulle colonne e $g(\mathbb{1}_n)=1$. Tale funzione coincide con il determinante.

dim: Poniamo $g(A) := \det(A^t)$.

Allora:

·) $g(AP_{ij}) = \det((AP_{ij})^t) = \det(P_{ij}A^t)$
$= -\det(A^t) = -g(A)$

·) $g(AD_i(\lambda)) = \det((AD_i(\lambda))^t) = \det(D_i(\lambda)A^t)$
$= \lambda \det A^t = \lambda g(A)$

Se $B = (A^1|\dots|A^i+C|\dots|A^n)$

e $C^i(A,C) = (A^1|\dots|C|\dots|A^n)$ allora

$g(B) = \det(B^t) = \det(A^t) + \det(R_i(A,C))$
$= g(A) + \det(C^i(A,C)^t) = g(A) + g(C^i(A,C))$

·) $g(\mathbb{1}_n) = \det(\mathbb{1}_n^t) = \det(\mathbb{1}_n) = 1$

Quindi una tale g esiste.
Vediamo che è unica.
Se g è una tale funzione,
allora definiamo $f: Mat_{n\times n} \to \mathbb{R}$ t.c.

$$f(A) = g(A^t)$$

Allora f è alternante sulle righe,
multi-lineare sulle righe e $f(\mathbb{1}_n)=1$.
Quindi $f=\det$. Allora

$$g(A) = f(A^t) = \det(A^t) = \det(A)$$

$\forall A \in Mat_{n\times n}$. Ne segue che $g=\det$.

$\boxtimes$

Quindi possiamo operare sulle
<u>colonne</u> per calcolare il
determinante.

Es: Calcolare il determinante di

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sol:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

$\square$

Es: Calcolare il determinante di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol.:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -12 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -12$$

$\square$

Es: Calcolare il determinante di

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol.:

$$\det A = -\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= +\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= -\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \end{pmatrix} = 2\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= 2\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -4$$

Def: •) Una matrice triangolare superiore è una matrice quadrata a scala.

•) Una matrice triangolare inferiore è una matrice quadrata la cui trasposta è a scala

Es: $\begin{pmatrix} 10 & 1 & 13 \\ 0 & -1 & i \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Triangolare superiore — Triangolare inferiore.

•) Una matrice triangolare è una matrice triangolare superiore oppure triangolare inferiore.

OSS: U triangolare $\Rightarrow \det U =$ prodotto dei suoi elementi diagonali.

Sviluppi di Laplace del determinante

Abbiamo visto che per calcolare il determinante di una matrice quadrata possiamo operare sulle righe o sulle colonne per ridurre la matrice ad una matrice triangolare il cui determinante è semplicemente il prodotto degli elementi diagonali.
Vediamo adesso un'altra tecnica: calcoliamo il determinante di una matrice $n \times n$, riducendoci a calcolare il determinante di matrici $(n-1) \times (n-1)$.

Def: Data $A \in Mat_{n \times n}$ ed una coppia (i,j) definiamo $A_{ij} \in Mat_{(n-1) \times (n-1)}$ come la sottomatrice di A ottenuta rimuovendo la riga i-esima e la colonna j-esima.

Es:

- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A_{11} = d \quad A_{12} = c$

$A_{21} = b \quad A_{22} = a$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

$A_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \quad A_{13} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

$A_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \quad A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

$A_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad A_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

TEOREMA (Sviluppi di Laplace)

Sia $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$

1) Dato un indice di riga $i \in \{1, \dots, n\}$ si ha

$$\boxed{\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A_{i,j})}$$

("Sviluppo del determinante lungo la riga i")

2) Dato un indice di colonna $j \in \{1, \dots, n\}$ si ha

$$\boxed{\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A_{i,j})}$$

("Sviluppo del determinante lungo la colonna j")

dim: 1) Siano $\hat{e}_1 = e_1^t, \dots, \hat{e}_n = e_n^t$ le righe di $\mathbb{1}_n$, ovvero

$$\hat{e}_i = (0, 0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)$$

Allora la i-esima riga di A è

$$A_i = a_{i1}\hat{e}_1 + a_{i2}\hat{e}_2 + \dots + a_{in}\hat{e}_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{e}_j$$

Dalla linearità del determinante nella i-esima riga otteniamo

$$\det(A) = \det\left(A_1, \dots, A_{i-1}, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{e}_j, A_{i+1}, \dots, A_n\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \det\left(A_1, \dots, A_{i-1}, \hat{e}_j, A_{i+1}, \dots, A_n\right)$$

Rimane, quindi, da dimostrare che

$$\det\left(A_1, \dots, A_{i-1}, \hat{e}_j, A_{i+1}, \dots, A_n\right) = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$$

Si ha:

$$\det\left(A_1, \dots, A_{i-1}, \hat{e}_j, A_{i+1}, \dots, A_n\right) =$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & 0 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & 0 & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Scambiando successivamente la riga i-esima con le righe immediatamente sopra otteniamo

$$= (-1)^{i-1} \det \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & 0 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & 0 & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & 0 & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & 0 & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Scambiando successivamente la colonna j-esima con le colonne immediatamenta a sinistra otteniamo

$$= (-1)^{j-1} (-1)^{i-1} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ 0 & a_{i+11} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$(-1)^{i+j-2} = (-1)^{i+j}$$

$$= (-1)^{i+j} \det \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & A_{i,j} \end{array} \right)$$

Rimane da dimostrare $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_{i,j} \end{pmatrix} = \det A_{i,j}$.

Ovviamente,

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_{i,j} \end{pmatrix} = \operatorname{rg}(A_{i,j}) + 1$$

(perché?), quindi

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_{ij} \end{pmatrix} = 0 \iff \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_{ij} \end{pmatrix} < n$$

$$\iff \operatorname{rg}(A_{ij}) < n-1 \iff \det A_{ij} = 0$$

Supponiamo quindi che A_{ij} sia invertibile. Allora esistono matrici elementari $E_1, \dots, E_K$ t.c.

$$A_{ij} = E_1 \cdots E_K .$$

Allora

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E_K \end{pmatrix}$$

Dimostriamo che

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = \det E$$

per ogni matrice elementare E :

- Notiamo che $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$ è ancora una matrice elementare dello dello stesso tipo di E:

·) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{ij} \end{pmatrix} = P_{i+1,j+1}$

·) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D_i(\lambda) \end{pmatrix} = D_{i+1}(\lambda)$

·) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & F_{ij}(\lambda) \end{pmatrix} = F_{i+1,j+1}(\lambda)$

Quindi $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = \det E$. Ne segue:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_{ij} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} \cdots \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E_K \end{pmatrix}$$

$$= \det E_1 \cdots \det E_K$$

$$= \det (E_1 \cdots E_K) = \det A_{ij}.$$

come volevasi dimostrare ☐

2) Dimostriamo che dato un indice di colonna j

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

Si ha:

sviluppo sulla j-esima riga

$$\det(A) = \det(A^t) =$$

$$\underset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det((A^t)_{ji})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

$$\boxed{\begin{array}{l} (A^t)_{ji} = (A_{ij})^t \\ \det(A_{ij})^t = \det A_{ij} \end{array}}$$

$\blacksquare$

__Es:__

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-2)\det\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (-2)\det\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2\cdot 1 = 2.$$

Es: Calcolare il determinante della seguente matrice, usando lo sviluppo lungo la 2ª riga e lungo la 3ª colonna

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sol.: Sviluppo lungo la seconda riga

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= 1\,(-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + (-1)(-1)^{2+2}\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$+ 1\,(-1)^{2+3}\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -(-2-3) - (-1-6) + (1-4) = 5+7-3 = 9$$

Sviluppo lungo la 3ª colonna

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3(-1)^{1+3}\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ 1(-1)^{2+3}\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)(-1)^{3+3}\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 3(1+2) + (1-4) - (-1-2) = 9 - 3 + 3 = 9$$

$\blacksquare$

Per calcolare il determinante:

•) Usare le operazioni elementari sulle righe o sulle colonne per creare una riga od una colonna contenente molti zero.

•) Usare lo sviluppo di Laplace lungo tale riga o tale colonna.

· **Es:**

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{3+1} \det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 2 \\ -4 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -6 & 2 \\ -4 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)(-1)^{1+2} \det\begin{pmatrix} -2 & -6 & 2 \\ -4 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -2 & -6 & 2 \\ -4 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= (-2) \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -4 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} = (-2) \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= (-2) \det\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = (-2)(-8+10) = -4$$

$\boxtimes$

OSS: Il determinante è l'unica funzione $\det: Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ tale che

1) $\det(P_{ij}A) = -\det(A)$, 2) $\det(D_i(\lambda)A) = \lambda\det(A)$,

3) $\det(F_{ij}(c)A) = \det(A)$.

Abbiamo visto che una tale funzione può essere calcolata con gli sviluppi di Laplace.

Se una funzione $f: Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ è multilineare sulle righe e alternante sulle righe allora f ha le proprietà 1), 2), 3).

Se inoltre $f(\mathbb{1}_n) = 1$ allora $f = \det$, per l'unicità.

Facciamo vedere che det è multilineare sulle righe:

$$\det\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \\ B \end{pmatrix} \underset{\text{Laplace}}{=} \det\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ A_i & 0 \\ \vdots & \vdots \\ A_n & 0 \\ B & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\underset{(3)}{=} \det\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ A_i+B & 1 \\ \vdots & \vdots \\ A_n & 0 \\ B & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i+B \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + (-1)^{i+n+1} \det\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ B \end{pmatrix}$$

$$\underset{(2)}{=} \det\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i+B \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + (-1)^{\cancel{i}+n+1+n-\cancel{i}} \det\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i+B \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

Calcolo dell'inversa mediante det

Def: Dato $n \geq 1$ ed una matrice quadrata $A \in Mat_{n \times n}$ e dati un indice di riga i ed un indice di colonna j, il <u>cofattore</u> (i,j) di A è il numero

$$C_{ij} = C_{ij}(A) = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Quindi, C_{ij} ha lo stesso segno di $\det A_{ij}$ se $i+j$ è pari ed ha segno opposto se $i+j$ è dispari. I segni sono quindi

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Possiamo riscrivere gli sviluppi di Laplace usando questa notazione:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

<u>Def</u>: La <u>matrice aggiunta ad A</u> è la matrice Agg(A) che ha come componenti i cofattori di A

$$Agg(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & & & \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

<u>Es</u>: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$C_{11}(A) = d \,,\ C_{12}(A) = -c \,,\ C_{21}(A) = -c \,,\ C_{22}(A) = a$$

$$Agg(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Agg(A)^t = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A\, Agg(A)^t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

$$= \det(A)\, \mathbb{1}_2 .$$

TEOREMA

Sia $A \in Mat_{n\times n}$. Allora

$$\boxed{A\, Agg(A)^t = \det A\, \mathbb{1}_n}$$

dim: Verifichiamo che le due matrici sono uguali ovvero che

$$\left(A\, Agg(A)^t\right)_i^j = \begin{cases} \det A & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i\neq j \end{cases}$$

Vediamo prima le componente ii:

$$\left(A Agg(A)^t\right)_i^i = A_i \left(Agg(A)^t\right)^i$$

$$= A_i \left(Agg(A)_i\right)^t$$

$$= \sum_{j=1}^n a_{ij}\, C_{ij} = \det A$$

Se $i \neq j$:

$$\left(A \, Agg(A)^t\right)_i^j = A_i \left(Agg(A)^t\right)^j$$

$$= A_i \left(Agg(A)_j\right)^t$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \, Agg(A)_j^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \, C_{jk}(A)$$

Sia B la matrice che ha le stesse righe di A a parte la j-esima che è uguale a A_i:

$$B = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ j \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \qquad A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

Allora $b_{jk} = a_{ik}$ $\forall k = 1, \dots, n$. Inoltre

$$C_{jk}(B) = C_{jk}(A).$$

Dato che B ha due righe uguali; $\det(B) = 0$. Otteniamo, sviluppando $\det(B)$ lungo la j-esima riga:

$$0 = \det(B) = \sum_{k=1}^{n} b_{jk} C_{jk}(B)$$

$$\underset{B_j = A_i}{=} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} C_{jk}(B) \underset{C_{jk}(B) = C_{jk}(A)}{=} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} C_{jk}(A)$$

Come volevasi dimostrare. ☒

<u>COR</u>: Se A è invertibile

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{Agg}(A)^t}$$

"Formula dell'inversa mediante il determinante" Talvolta si chiama "Formula di Cramer".

<u>Es</u>: Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{K})$ t.c. $ad-bc \neq 0$

$C_{11} = d \qquad C_{21} = -b$

$C_{12} = -c \qquad C_{22} = a$

$\Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Es: Calcolare l'inversa di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

utilizzando la formula di Cramer

Sol.:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 2$$

$$C_{11} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix} = 4, \quad C_{21} = -\det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}, \quad C_{31} = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -3$$

$$C_{12} = -\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix} = -2, \quad C_{22} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}, \quad C_{32} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$C_{13} = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -4, \quad C_{23} = -\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0, \quad C_{33} = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 4$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 1/2 & -3 \\ -2 & 1/2 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Utilizzo della formula di Cramer per risolvere sistemi lineari

Sia $A \in Mat_{n\times n}$ una matrice <u>non-singolare</u> ovvero tale che $\det A \neq 0$. Allora per ogni $b \in \mathbb{R}^n$ il sistema $AX=b$ ha l'unica soluzione

$$X = A^{-1} b.$$

Utilizziamo la formula di Cramer per descrivere le componenti $x_1, \dots, x_n$ di questa soluzione:

$$x_j = (A^{-1}b)_j = (A^{-1})_j\, b = \frac{1}{\det A} \left(Agg(A)^t\right)_j b$$

$$= \frac{1}{\det A} \left(Agg(A)^j\right)^t b =$$

$$= \frac{1}{\det A} (C_{1j}, C_{2j}, \dots, C_{nj}) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det A} \left(b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \dots + b_n C_{nj}\right)$$

Quindi

$$\boxed{x_j = \frac{\det A^j(b)}{\det A}}$$

dove

$$A^j(b) := \left(A^1 | \cdots | A^{j-1} | \overset{j}{b} | A^{j+1} | \cdots | A^n\right)$$

<u>Es</u>: Trovare l'unica soluzione del sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1 \\ x_1 + 4x_2 = 2 \end{cases}$$

<u>Sol.</u>: La matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

ha determinante uguale a $11 \neq 0$.

Calcoliamo $\det A^1(b)$ e $\det A^2(b)$:

$$\det A^1(b) = \det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 4+6 = 10$$

$$\det A^2(b) = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 4-1 = 3$$

$\Rightarrow$ L'unica soluzione è $X = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$. $\blacksquare$

· **Es**: Trovare l'unica soluzione di

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_1 \qquad + x_3 = 1 \end{cases}$$

Sol.: Il determinante della matrice dei coefficienti è

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = -3 + 10 = -13 \neq 0$$

Calcoliamo $\det A^1(b)$, $\det A^2(b)$, $\det A^3(b)$:

$$\det A^1(b) = \det\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 2 = 0$$

$$\det A^2(b) = \det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = -(14 + 12) = -26$$

$$\det A^3(b) = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = -(3+10) = -13$$

L'unica soluzione del sistema è quindi

$$X = \frac{1}{-13}\begin{pmatrix} 0 \\ -26 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

<u>Es</u>: Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ non-singolare.
Trovare una formula per la soluzione

$$\begin{cases} a x_1 + b x_2 = z_1 \\ c x_1 + d x_2 = z_2 \end{cases}$$

<u>Sol.</u>:

$$\det A^1\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} z_1 & b \\ z_2 & d \end{pmatrix} = z_1 d - z_2 b$$

$$\det A^2\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & z_1 \\ c & z_2 \end{pmatrix} = z_2 a - z_1 c$$

L'unica soluzione è

$$X = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d z_1 - b z_2 \\ -c z_1 + a z_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Es: Calcolare l'inversa della seguente matrice utilizzando prima Cramer e poi l'algoritmo di inversione. Qual'è più veloce?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

Sol.:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & -7 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & -6 \\ 5 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 0 & -13 & 16 \\ 1 & 5 & -6 \\ 0 & -32 & 32 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -13 & 16 \\ -32 & 32 \end{pmatrix}$$

$$= -\left(-13 \cdot 32 + 32 \cdot 16\right) = -32\,(16-13) = -32 \cdot 3$$

$$= -96 \neq 0$$

Quindi A è invertibile. Calcoliamo A^{-1} con la formula di Cramer:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left(\operatorname{Agg} A\right)^t$$

Dobbiamo calcolare i 9 cofattori:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C_{11} = \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 14 = -10$$

$$C_{12} = -\det \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = -(6+10) = -16$$

$$C_{13} = \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} = -21 - 10 = -31$$

$$C_{21} = -\det \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} = -(-6+28) = -22$$

$$C_{22} = \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 20 = -16$$

$$C_{23} = -\det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} = -(-14+15) = -1$$

$$C_{31} = \det \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = 6 - 8 = -2$$

$$C_{32} = -\det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = -(-4-12) = 16$$

$$C_{33} = \det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 4 + 9 = 13$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-96} \begin{pmatrix} -10 & -22 & -2 \\ -16 & -16 & 16 \\ -31 & -1 & 13 \end{pmatrix}$$

Utilizziamo adesso l'algoritmo di inversione:

$$(A|\mathbb{1}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -7 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -6 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -7 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -13 & 16 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -6 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -32 & 32 & 5 & -5 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & -6 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5/32 & 5/32 & -1/32 \\ 0 & -13 & 16 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & -6 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5/32 & 5/32 & -1/32 \\ 0 & 0 & 3 & 31/32 & 1/32 & -13/32 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & -6 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5/32 & 5/32 & -1/32 \\ 0 & 0 & 1 & 31/96 & 1/96 & -13/96 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 90/96 & 102/96 & -78/96 \\ 0 & 1 & 0 & 16/96 & 16/96 & -16/96 \\ 0 & 0 & 1 & 31/96 & 1/96 & -13/96 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 10/96 & 22/96 & 2/96 \\ 0 & 1 & 0 & 16/96 & 16/96 & -16/96 \\ 0 & 0 & 1 & 31/96 & 1/96 & -13/96 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{96}\begin{pmatrix} 10 & 22 & 2 \\ 16 & 16 & -16 \\ 31 & 1 & -13 \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

Utilizzo del determinante per il calcolo del rango

Studiamo come utilizzare il determinante per calcolare il rango di una matrice qualunque (non necessariamente quadrata).
Abbiamo bisogno della seguente notazione:

Notazione: Sia $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$ e siano
$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq m$ degli indici di riga e
$1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_t \leq n$ degli indici di colonna.
La matrice
$A([i_1, \dots, i_s], [j_1, \dots, j_t]) \in Mat_{s \times t}(\mathbb{K})$
è la sottomatrice di A supportata sulle righe $i_1, \dots, i_s$ e sulle colonne $j_1, \dots, j_t$.
In MATLAB: A([i1,...,is],[j1,...,jt])
Vediamo qualche esempio:

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & -10 & -7 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & -9 \\ -6 & -5 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

$$A([1,3],[2,4]) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A([1,3],[2,4,5]) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & -1 & -9 \end{pmatrix}$$

OSS 1: Se le colonne di una sottomatrice $A([i_1,\dots,i_s],[j_1,\dots,j_t])$ sono lin. Ind. allora le colonne $A^{j_1},\dots,A^{j_t}$ di A sono lin. Ind.

Infatti, se denotiamo con $\bar{A}^{j_1},\dots,\bar{A}^{j_t} \in \mathbb{K}^s$ le colonne di $A([i_1,\dots,i_s],[j_1,\dots,j_t])$, ogni relazione di dipendenza lineare $x_1 A^{j_1} + \dots + x_t A^{j_t} = 0$ induce una relazione di dipendenza lineare $x_1 \bar{A}^{j_1} + \dots + x_t \bar{A}^{j_t} = 0$.

Quindi, $\operatorname{rg} A([i_1,\dots,i_s],[j_1,\dots,j_t]) \le \operatorname{rg} A$.

Def: Data $A \in Mat_{m \times n}$ ed una sottomatrice di ordine k
$B = A([i_1, .., i_k], [j_1, .., j_k])$
diciamo che la sottomatrice
$A([i_1, .., i_k] \cup \{l\}, [j_1, .., j_k] \cup \{s\})$
ottenuta da B aggiungendo la riga l-esima ($l \notin \{i_1, .., i_k\}$) e la colonna s-esima ($s \notin \{j_1, .., j_k\}$)
orla la matrice B ed è un' **orlata di B**

Es: Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$B = A([1,2],[1,2]) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ è orlata da

$$A([1,2,3],[1,2,4]) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \quad (l = 3, s = 4)$$

Es:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&4&7\\0&3&1&4&8\\1&0&7&3&9\\2&4&5&6&10\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}0&2\\3&1\end{pmatrix}=A\left([1,2],[2,3]\right)$$

Orliamo B con la 3^a riga e la 1^a colonna

$$A\left([1,2]\cup\{3\},[2,3]\cup\{1\}\right)=\begin{array}{c}\qquad B\\ \left(\begin{array}{c|cc}1&0&2\\0&3&1\\\hline 1&0&7\end{array}\right)\end{array}$$

Orliamo B con la 3^a riga e la 4^a colonna

$$A\left([1,2]\cup\{3\},[2,3]\cup\{4\}\right)=\begin{array}{c}B\qquad\\ \left(\begin{array}{cc|c}0&2&4\\3&1&4\\\hline 0&7&3\end{array}\right)\end{array}$$

Orliamo B con la 4^a riga e la 5^a colonna

$$A\left([1,2]\cup\{4\},[2,3]\cup\{5\}\right)=\begin{pmatrix}0&2&7\\3&1&8\\4&5&10\end{pmatrix}$$

OSS 2 : Se $\det A([i_1,\dots,i_k],[j_1,\dots,j_k]) \neq 0$

e $\det A([i_1,\dots,i_k]\cup\{e\},[j_1,\dots,j_k]\cup\{s\}) = 0 \ \forall e$

Allora $A^s \in \langle A^{j_1},\dots,A^{j_k} \rangle$.

Infatti, per OSS 1, le colonne $A^{j_1},\dots,A^{j_k}$ di A sono lin. Ind. $\Rightarrow$ $rg(A^{j_1}|\dots|A^{j_k}|A^s) \geq k$.

Se fosse $rg(A^{j_1}|\dots|A^{j_k}|A^s) = k+1$ allora anche $Rrg(A^{j_1}|\dots|A^{j_k}|A^s) = k+1$. Quindi esiste una riga di $(A^{j_1}|\dots|A^{j_k}|A^s)$ che insieme alle righe $i_1,\dots,i_k$ formano una base di $Row(A^{j_1}|\dots|A^{j_k}|A^s)$.

Quindi esiste una riga e t.c.

$\det A([i_1,\dots,i_k]\cup\{e\},[j_1,\dots,j_k]\cup\{s\}) \neq 0$

contro l'ipotesi.

Def: Sia $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$. Dato un indice $1 \leq k \leq \min(m,n)$, un minore di ordine k di A (o k-minore) è il determinante di una sottomatrice di A di taglia $k \times k$.

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

Ci sono $3 \cdot 6 = 18$ minori di ordine 2. Eccone due:

$\det A([1,2],[1,2]) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 5$, $\det A([2,3],[2,4]) = 4$

Ci sono 4 minori di ordine 3

$$\det A([1,2,3],[1,2,3]) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} = -15$$

$$\det A([1,2,3],[1,2,4]) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 7$$

$$\det A([1,2,3],[1,3,4]) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} = 9$$

$$\det A([1,2,3],[2,3,4]) = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} = 10$$

Teorema degli orlati

Sia $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$. Allora $rg\, A = r$ se e solo $\exists$ r indici di riga $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq m$ ed r indici di colonna $1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq n$ t.c. il minore $\det A([i_1, \ldots, i_r], [j_1, \ldots, j_r])$ è diverso da zero e ogni minore ottenuto orlando tale minore è zero.

In formule,

$$rg(A) = r$$

$$\Updownarrow$$

$\exists\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq m$ e $1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq m$ t.c.

i) $\det(A([i_1, \ldots, i_r], [j_1, \ldots, j_r]) = 0$ e

ii) $\det(A([i_1, \ldots, i_r] \cup \{\ell\}, [j_1, \ldots, j_r] \cup \{s\})) = 0$

$\forall \ell \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$ e $\forall s \notin \{j_1, \ldots, j_r\}$.

dim: Supponiamo che $rg(A) = r$.

Allora esistono r indici di colonna $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n$ tali che le colonne $A^{j_1}, \dots, A^{j_r}$ formano una base di $Col(A)$. Sia

$$B = (A^{j_1} | \dots | A^{j_r}) \in Mat_{m \times r}(\mathbb{K})$$

la matrice che le ha come colonna.

Allora $rg(B) = r$. Poiché $Rrg(B) = rg(B) = r$ esistono r indici di riga $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m$ tali che le righe $B_{i_1}, \dots, B_{i_r}$ formano una base di $Row(B)$. Allora la matrice

$$B([i_1, \dots, i_r], [1, \dots, r]) = A([i_1, \dots, i_r], [j_1, \dots, j_r])$$

ha rango r e quindi è invertibile e quindi il minore di ordine r

$$\det A([i_1, \dots, i_r], [j_1, \dots, j_r])$$

è diverso da zero. Ne segue che la condizione (i) è verificata.

Se aggiungiamo a B una colonna A^s di A con $s \notin \{j_1, \dots, j_r\}$, otteniamo una matrice che ha ancora rango r.
Quindi tale matrice non può avere $r+1$ righe linearmente indipendenti.
In altre parole tutti i suoi minori di ordine $r+1$ sono zero.
Questo dimostra la condizione (ii).

L'altra implicazione ($\Uparrow$) è l'oss 2 che abbiamo visto prima.

$\square$

Es: Stabilire se l'insieme

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

è linearmente indipendente.

Sol.: Calcoliamo il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ che ha gli el. di V come colonne.

Dato che il minore

$$\det A([1,2],[1,2]) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

concludiamo $\operatorname{rg} A = 2 \Rightarrow V$ è lin. Ind. $\boxtimes$

Es: Stabilire se

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

è lin. Ind.

Sol.: Calcoliamo $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Il minore

$$\det A([2,3],[1,2]) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A \geq 2.$$

Orliamo questo minore in tutti i modi possibili:

$$\det A([2,3] \cup \{1\}, [1,2] \cup \{3\}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det A([2,3] \cup \{2\}, [1,2] \cup \{3\}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A = 2.$$

Es: Calcolare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & -7 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

Sol.: Cerchiamo un minore diverso da zero: ad esempio

$$\det A([1,4],[1,3]) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & -7 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

Quindi, $\operatorname{rg} A \geq 2$. Cerchiamo un minore orlato diverso da zero (se non c'è allora $\operatorname{rg} A = 2$): ad esempio

$$\det A([1,4] \cup \{2\}, [1,3] \cup \{2\}) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -7 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 8 \neq 0$$

$\Rightarrow \operatorname{rg} A \geq 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & -7 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

Orliamo questo minore nei due modi possibili (c'é solo una colonna che possiamo aggiungere):

$$\det A([1,2,4]\cup\{3\}, :) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & -7 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -7 & -1 \\ 0 & 7 & 7 & -7 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 7 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -7 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det A([1,2,4]\cup\{5\}, :) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 9 & 5 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg} A = 3.$$

Determinante di matrici triangolari a blocchi

Una matrice della forma

$$T = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

dove $A \in Mat_{k \times k}$, $B \in Mat_{t \times t}$ sono quadrate, si dice triangolare a blocchi.

TEOREMA:

$$\det \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \det A \det B$$

dim: Supponiamo, prima, che $\det A \det B \neq 0$, ovvero che sia A che B sono invertibili. Allora

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_k & A^{-1}C \\ 0 & \mathbb{1}_t \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Poiché A e B sono invertibili, esistono matrici elementari $E_1, \dots, E_f \in \mathrm{Mat}_{k\times k}$, $F_1, \dots, F_e \in \mathrm{Mat}_{t\times t}$ tali che

$$A = E_1 \cdots E_f \quad , \quad B = F_1 \cdots F_e .$$

Allora

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \cdots E_f & 0 \\ 0 & F_1 \cdots F_e \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_t \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} E_f & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_k & 0 \\ 0 & F_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \mathbb{1}_k & 0 \\ 0 & F_e \end{pmatrix}$$

Osserviamo che le matrici

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}$$

dove E ed F sono elementari, sono ancora matrici elementari dello stesso tipo:

$$\begin{pmatrix} P_{ij} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} = P_{ij} \qquad \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & P_{ij} \end{pmatrix} = P_{i+k, j+k}$$

$$\begin{pmatrix} D_i(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} = D_i(\lambda) \qquad \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \\ & D_i(\lambda) \end{pmatrix} = D_{i+k}(\lambda)$$

$$\begin{pmatrix} F_{ij}(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} = F_{ij}(\lambda) \qquad \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \\ & F_{ij}(\lambda) \end{pmatrix} = F_{i+k, j+k}(\lambda)$$

Quindi

$$\det\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} = \det E, \quad \det\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} = \det F.$$

Concludiamo che

$$\det\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} =$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} E_f & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & F_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & F_e \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} E_1 & \\ & \mathbb{1} \end{pmatrix} \cdots \det\begin{pmatrix} E_f & \\ & \mathbb{1} \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \\ & F_1 \end{pmatrix} \cdots \det\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \\ & F_e \end{pmatrix}$$

$$= \det E_1 \cdots \det E_f \det F_1 \cdots \det F_e$$

$$= \det(E_1 \cdots E_f) \det(F_1 \cdots F_e)$$

$$= \det A \det B,$$

come volevamo dimostrare.

Supponiamo adesso che $\det A \det B = 0$, ovvero che A o B non è invertibile.

$$(A \mid \mathbb{1}_k) \rightsquigarrow (U_0 \mid T), \quad (B \mid \mathbb{1}_t) \rightsquigarrow (V_0 \mid S)$$

$U_0 = \mathrm{rref}(A)$, $V_0 = \mathrm{rref}(B)$. Allora

$TA = U_0$ e $SB = V_0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 & TC \\ 0 & V_0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} U_0 & TC \\ 0 & V_0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}^{-1} \det \begin{pmatrix} U_0 & TC \\ 0 & V_0 \end{pmatrix}$$

Poiché $\begin{pmatrix} U_0 & TC \\ 0 & V_0 \end{pmatrix}$ è triangolare superiore, il suo determinante è uguale al prodotto dei suoi elementi diagonali che però contengono uno zero (perché o U_0 o V_0 non ha rango massimo). Quindi

$$\det \begin{pmatrix} U_0 & TC \\ 0 & V_0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = 0 = \det A \det B.$$

$\boxtimes$

<u>COR</u>: $\det \begin{pmatrix} A(1,1) & A(1,2) & \cdots & A(1,n) \\ 0 & A(2,2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & A(n,n) \end{pmatrix}$

$= \det A(1,1) \det A(2,2) \cdots \det A(n,n)$