Diagonalizzazione

Def: Un endomorfismo lineare

$$\mathcal{L}: V \to V$$

si dice diagonalizzabile se esiste una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V nella quale la matrice che rappresenta $\mathcal{L}$ è diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] & V \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "D"] & V \end{tikzcd}$$

ovvero

$$\boxed{\mathcal{L}(v_i) = \lambda_i v_i} \qquad \forall i = 1, \dots, n.$$

In tal caso $\mathcal{B}$ si dice una base diagonalizzante per $\mathcal{L}$.

OSS: Se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base diagonalizzante allora

$$\mathcal{L}(\langle v_i \rangle) \subseteq \langle v_i \rangle$$

ovvero le n rette $\langle v_1 \rangle, \dots, \langle v_n \rangle$ sono fissate da $\mathcal{L}$ (ma non puntualmente!):

$$\mathcal{L}(t v_i) = t\,\mathcal{L}(v_i) = t \lambda_i v_i = \lambda_i (t v_i) \in \langle v_i \rangle.$$

E vale anche il viceversa: se $\dim V = n$ e $r_1, r_2, \dots, r_n$ sono rette di V t.c.

1) $r_i \cap r_j = \{0_V\} \quad \forall i \neq j$

2) $\mathcal{L}(r_i) \subseteq r_i$

allora $\mathcal{L}$ è diagonalizzabile: infatti

$$r_i = \langle v_i \rangle$$

$\Rightarrow \mathcal{L}(v_i) = \lambda_i v_i$ per qualche $\lambda_i \in \mathbb{K}$

e le condizione 1) ci dice che $\{v_1, \dots, v_n\}$ è lin. Ind..

Le rette $\langle v_1 \rangle, \dots, \langle v_n \rangle$ si dicono <u>assi di simmetria</u> di $\mathcal{L}$

Non-esempio: Una rotazione

$$R_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

del piano è diagonalizzabile se e solo se ha due rette fissate

$\Longleftrightarrow \theta = 0$ o $\theta = \pi \Longleftrightarrow R_\theta = \pm Id_{\mathbb{R}^2}$

Esempio: la riflessione

$$Q_m : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

rispetto alla retta $y = mx$ è diagonalizzabile per ogni m. Infatti fissa le rette

$r_1 : y = mx \qquad r_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \rangle$

$r_2 = r_1^\perp : \quad x = -my \qquad r_2 = \langle \begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

Si noti che r_1 è fissata puntualmente ovvero $Q_m(v) = v \quad \forall v \in r_1$

mentre r_2 non è fissata puntualmente:

$Q_m(w) = -w \quad \forall w \in r_2$.

Def: Una matrice $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ è diagonalizzabile su $\mathbb{K}$ se $S_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ è diagonalizzabile ovvero se $\exists\ \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di $\mathbb{K}^n$ tale che la matrice che rappresenta S_A in $\mathcal{B}$ è una matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}} = S_{B^{-1}}"'] & \mathbb{K}^n \arrow[d, "F_{\mathcal{B}} = S_{B^{-1}}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "D"] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

dove $B = (v_1 | \cdots | v_n) \in Mat_{n\times n}$ (invertibile)

Questo vuol dire che

$$B^{-1} A B = D$$

$$\iff \quad AB = DB$$

$$\iff \quad A v_i = \lambda_i v_i \qquad \forall i = 1, \dots, n.$$

Autovalori e autovettori

<u>Def</u>: Un <u>autovettore</u> di un endomorfismo lineare di V

$$\mathcal{L} : V \to V$$

è un vettore non-nullo $v \in V \setminus \{0_V\}$ t.c. esiste $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che

$$\mathcal{L}(v) = \lambda v .$$

In tal caso il numero $\lambda \in \mathbb{K}$ si dice l'autovalore corrispondente all'autovettore v.

<u>Riformulando</u>: $\mathcal{L} : V \to V$ è diagonalizzabile se esiste una base di V composta di autovettori per $\mathcal{L}$.

Def: Un <u>autovettore di autovalore $\lambda \in \mathbb{K}$</u> di una matrice $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ è un vettore non-nullo $X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ tale che

$$AX = \lambda X.$$

Es: Se $U = \begin{pmatrix} u_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & u_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix} \in Mat_{n\times n}$ è triangolare superiore allora

$$Ue_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = u_{11} e_1$$

e_1 è un autovettore per U di autovalore u_{11}.

Es: $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ <u>non</u> ha autovettori in $\mathbb{R}^2$ se $\theta \neq 0$ e $\theta \neq \pi$.

Se $\theta = 0$, $R_0 = \mathbb{1}_2$ e ogni $X \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ è un autovettore di autovalore 1.

Se $\theta = \pi$, $R_\theta = -\mathbb{1}_2$ e ogni $X \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ è un autovettore di autovalore -1.

– Quindi, non è vero che ogni matrice $n \times n$ ammette un autovettore in $\mathbb{K}^n$ (ad es. R_θ).

Desideriamo sapere sotto quali ipotesi una matrice $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ ammetta un autovettore in $\mathbb{K}^n$: vediamo cosa vuol dire essere un autovettore di autovalore λ:

$v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ è autovettore di autovalore λ per A se $Av = \lambda v$

$$\iff \lambda v - Av = 0_{\mathbb{K}^n}$$

$$\iff (\lambda \mathbb{1}_n - A)v = 0_{\mathbb{K}^n}$$

$$\iff v \in Ker(\lambda \mathbb{1}_n - A)$$

$$\iff Ker(\lambda \mathbb{1}_n - A) \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\}$$

$$\iff \boxed{\det(\lambda \mathbb{1}_n - A) = 0}$$

Studiamo

$$p_A(x) := \det(x \mathbb{1}_n - A)$$

dove $x \in \mathbb{K}$ in qualche esempio

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$p_A(x) = \det\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} x-1 & -3 \\ 0 & x-2 \end{pmatrix} = (x-1)(x-2)$$

$$= x^2 - 3x + 2$$

Es: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$p_A(x) = \det\begin{pmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{pmatrix}$$

$$= (x-a)(x-d) - bc$$

$$= x^2 - (a+d)x + (ad-bc)$$

$$= x^2 - \mathrm{Tr}(A)x + \det(A)$$

è un polinomio monico di grado 2.

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$P_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -2 & -1 \\ 0 & x-2 & -2 \\ 0 & -4 & x-3 \end{pmatrix}$$

$$= (x-1) \det \begin{pmatrix} x-2 & -2 \\ -4 & x-3 \end{pmatrix}$$

$$= (x-1)\left(x^2 - \underbrace{5}_{\operatorname{Tr}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}} x - \underbrace{2}_{\det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}}\right)$$

$$= x^3 - 5x^2 - 2x - x^2 + 5x + 2$$

$$= x^3 - 6x^2 + 3x + 2$$

è un polinomio monico di grado 3.

$\underline{Es}$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}$

$$P_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & x-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & x-a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= (x-a_{11})\left[(x-a_{22})(x-a_{33}) - a_{32}a_{23}\right] +$$
$$+ a_{21}\left(-a_{12}(x-a_{33}) - a_{13}a_{32}\right)$$
$$- a_{31}\left(a_{12}a_{23} + a_{13}(x-a_{22})\right) =$$

$$= \left(x^2 - (a_{11}+a_{22})x + a_{11}a_{22}\right)(x-a_{33}) - a_{32}a_{23}(x-a_{11})$$
$$- a_{12}a_{21}(x-a_{33}) - a_{13}a_{32}a_{21} - a_{12}a_{23}a_{31} +$$
$$- a_{31}a_{13}(x-a_{22}) =$$
$$= x^3 - a_{33}x^2 - (a_{11}+a_{22})x^2 + (a_{11}+a_{22})a_{33} +$$
$$+ a_{11}a_{22}x - a_{11}a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}x + a_{11}a_{23}a_{32}$$
$$- a_{12}a_{21}x + a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{32}a_{21} - a_{12}a_{23}a_{31}$$
$$- a_{31}a_{13}x + a_{31}a_{13}a_{22} =$$
$$= x^3 - \operatorname{tr}A\, x^2 + [a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} +$$
$$- a_{12}a_{21} - a_{13}a_{31} - a_{23}a_{32}]x - \det A$$

Chi è il coefficiente di x ?

<u>OSS</u>: Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ allora

$$a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21} - a_{13}a_{31} - a_{23}a_{32}$$
$$= \frac{1}{2}\left[Tr(A)^2 - Tr(A^2)\right]$$

$$Tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$
$$Tr(A)^2 = a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + 2a_{11}a_{22} + 2a_{11}a_{33} + $$
$$+ 2a_{22}a_{33}$$
$$Tr(A^2) = a_{11}^2 + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} +$$
$$+ a_{21}a_{12} + a_{22}^2 + a_{23}a_{32} +$$
$$+ a_{31}a_{13} + a_{32}a_{23} + a_{33}^2$$

$$Tr(A)^2 - Tr(A^2) = 2a_{11}a_{22} + 2a_{11}a_{33} + 2a_{22}a_{33}$$
$$-2a_{12}a_{21} - 2a_{13}a_{31} - 2a_{23}a_{32}$$

$$= 2\left[a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21} - a_{13}a_{31} - a_{23}a_{32}\right]$$

$\blacksquare$

Prop. : Se $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Se $A \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{K})$ allora

$$P_A(x) = \det(x\mathbb{1}_3 - A)$$
$$= x^3 - Tr(A)x^2 + \frac{1}{2}\left[Tr(A)^2 - Tr(A^2)\right]x - \det A.$$

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = -5(3+1) = -20$$

$$Tr A = 5 \Rightarrow (Tr A)^2 = 25$$

$$Tr(A^2) = (1+6-1) + (6+1+4) + (-1+4+9)$$
$$= 6 + 11 + 12 = 29$$

$$P_A(x) = x^3 - 5x^2 + \frac{1}{2}(-4)x + 20$$

$$= x^3 - 5x^2 - 2x + 20.$$

Se $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ allora

$$P_A(x) = \det(x \mathbb{1}_n - A)$$

è un polinomio monico di grado n della forma

$$P_A(x) = x^n - tr(A)x^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det A$$

Esso si chiama il <u>polinomio caratteristico</u> di A.

Abbiamo dimostrato:

Se $\exists\, \lambda \in \mathbb{K}$ t.c. $P_A(\lambda) = 0$ allora $\exists\, v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ t.c. $Av = \lambda v$

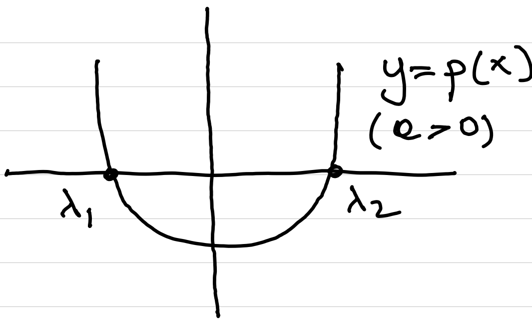
Ricordiamo che se $p \in \mathbb{K}[x]$, un numero $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $p(\lambda) = 0$ si dice una <u>radice</u> o uno <u>zero</u> di $p(x)$.

Es: $p(x) = ax^2 + bx + c$

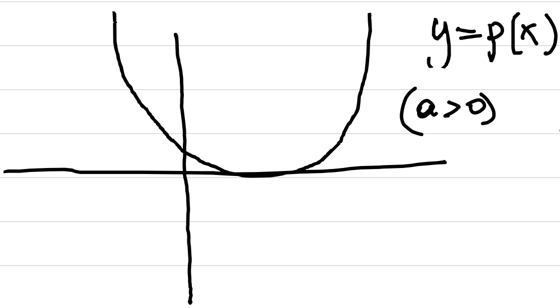
Le radici di p sono

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

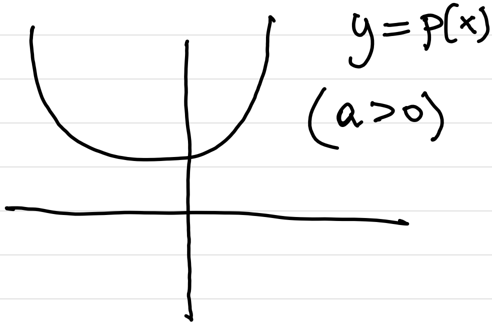
$\Delta = b^2-4ac$ si dice il discriminante di p



$\Delta > 0$:
2 radici reali distinte



$\Delta = 0$
2 radici reali coincidenti

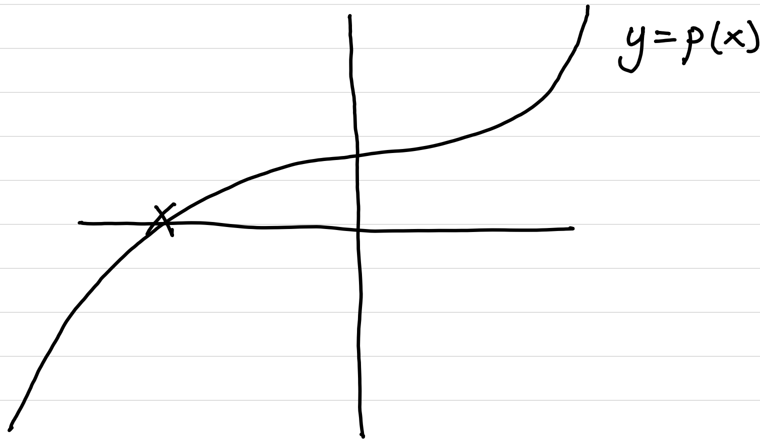


$\Delta < 0$

2 radici complesse distinte

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

<u>OSS</u>: Un polinomio di grado 3 ha almeno una radice reale



<u>Teorema</u> (Fondamentale dell'algebra)

Sia $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$

Allora $\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ <u>distinti</u> e

$m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ t.c.

$$p(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}\cdots(x-\lambda_k)^{m_k}$$

Il numero naturale m_i si dice la molteplicità algebrica della radice λ_i (per ogni $i=1,\dots,k$).

Quindi "un polinomio $p \in \mathbb{C}[x]$ di grado n ha n radici complesse se contate con la loro molteplicità (algebrica)"

<u>Es</u>: Cerchiamo le radici di $p_{R_\theta}(x)$ per $\theta \neq 0, \pi$: $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$$p_{R_\theta}(x) = x^2 - 2\cos\theta\, x + 1$$
$$= (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$$

$$\lambda_{1,2} = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1}$$
$$= \cos\theta \pm i \sin\theta$$

Quindi R_θ ha due autovalori distinti se $\theta \neq 0, \pi$, entrambi con molteplicità algebrica 1.

OSS: Se $P_A(x)$ ha una radice complessa non-reale, allora A non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$: infatti se $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ è t.c. $P_A(\lambda)=0$ allora $X \in \operatorname{Ker}(\lambda \mathbb{1}_n - A)$

$$\Leftrightarrow \quad AX = \lambda \mathbb{1}_n \in \mathbb{C}^n$$

$$\Rightarrow \quad X \in \mathbb{C}^n.$$

$A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$

Quindi A non ha un autovettore reale di autovalore λ.

In altre parole se

$$B^{-1}AB = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, .., \lambda_n)$$

allora $\lambda = \lambda_i$ per qualche i e quindi $B \notin Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Prop: Il polinomio caratteristico è invariante per similitudine, ovvero

$$P_{B^{-1}AB}(x) = P_A(x)$$

dim:

$$\begin{aligned}
P_{B^{-1}AB}(x) &= \det\left(x\mathbb{1}_n - B^{-1}AB\right) \\
&= \det\left(x B^{-1}B - B^{-1}AB\right) \\
&= \det\left(B^{-1}(x\mathbb{1}_n - A)B\right) \\
&= \det(B)^{-1} P_A(x) \det(B) \\
&= P_A(x). \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Lo spettro di una matrice

Sia $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$. Lo spettro di A è l'insieme dei suoi autovalori.

$$Sp(A) = \{\lambda \mid p_A(\lambda) = 0\}$$

In genere, questi autovalori non appartengono al campo $\mathbb{K}$.
Allora denotiamo con

$$Sp(A)_{\mathbb{K}} = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid p_A(\lambda) = 0\}.$$

Se $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ allora il suo spettro è

$$Sp(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid p_A(\lambda) = 0\}$$

e il suo spettro reale è

$$Sp(A)_{\mathbb{R}} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid p_A(\lambda) = 0\} \subseteq Sp(A).$$

Per il Teorema fondamentale dell'algebra

$$|Sp(A)_{\mathbb{R}}| \leq |Sp(A)| \leq n.$$

Molteplicità geometrica di un autovalore

Sia $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$. Sia $\lambda \in Sp(A)_{\mathbb{K}}$.
Allora il sottospazio vettoriale

$$\mathrm{Ker}(\lambda \mathbb{1}_n - A) \subseteq \mathbb{K}^n$$

è non-nullo e si chiama l'autospazio di A corrispondente all'autovalore $\lambda \in \mathbb{K}$.

Notazione:

$$\boxed{V_\lambda(A) := \mathrm{Ker}(\lambda \mathbb{1}_n - A)}$$

Si noti che

$$V_\lambda(A) \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\} \iff \lambda \in Sp(A)_{\mathbb{K}}$$

I vettori non-nulli di $V_\lambda(A)$ sono tutti e soli gli autovettori di autovalore λ per A.

Def: La molteplicità geometrica di $\lambda \in Sp(A)_{\mathbb{K}}$ è la dimensione di $V_\lambda(A)$ e si denota con $mg(\lambda)$:

$$\boxed{mg_A(\lambda) = \dim V_\lambda(A)}$$

Denotiamo la molteplicità algebrica di λ con $\boxed{ma_A(\lambda)}$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$P_A(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

$$\Rightarrow Sp(A)_{\mathbb{R}} = \{1\}$$

$$ma_A(1) = 2$$

$$mg_A(1) = \dim \operatorname{Ker}(\mathbb{1}_2 - A)$$

$$= \dim \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 1$$

Prop.: Per ogni $\lambda \in Sp(A)_{\mathbb{K}}$ si ha

$$mg_A(\lambda) \leq ma_A(\lambda)$$

dim:

Sia $\{v_1, \dots, v_K\}$ una base di $V_\lambda(A)$ (quindi $K = mg_A(\lambda)$ e

$$Av_i = \lambda v_i \quad \forall i = 1, \dots, K)$$

estendiamola ad una base di $\mathbb{K}^n$

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_K, v_{K+1}, \dots, v_n\}$$

La matrice che rappresenta S_A nella base $\mathcal{B}$ è

$$C = \begin{pmatrix} \lambda \mathbb{1}_K & L \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

per qualche $M \in Mat_{(n-K)\times(n-K)}$ e $L \in Mat_{K\times(n-K)}$.
Quindi se $B = (v_1 | \dots | v_n)$, allora $C = B^{-1}AB$. Si ha

$$P_A(x) = P_C(x) = (x-\lambda)^K P_M(x)$$

$$\Rightarrow \quad K \leq ma_A(\lambda). \quad \blacksquare$$

Teorema :

$A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ è diagonalizzabile su $\mathbb{K}$ se e solo se

1) $Sp(A) = Sp(A)_{\mathbb{K}} \subseteq \mathbb{K}$ e
2) $mg(\lambda) = ma(\lambda) \quad \forall \lambda \in Sp(A)$.

dim :

$\Rightarrow$) Se A è diagonalizzabile su $\mathbb{K}$ allora $\exists\, B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ invertibile tale che $B^{-1}AB = D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$\Rightarrow D \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{K}$.

Inoltre, $\forall \lambda \in Sp(A)$

$$\begin{aligned} \dim V_\lambda(A) &= \dim Ker(\lambda \mathbb{1}_n - A) \\ &= \dim Ker(\lambda \mathbb{1}_n - BDB^{-1}) \\ &= \dim Ker(B(\lambda \mathbb{1}_n - D)B^{-1}) \\ &= n - rg(B(\lambda \mathbb{1}_n - D)B^{-1}) \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$rg(BCB^{-1}) = rg(C)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "B^{-1}CB"] \arrow[d, "F_B"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "F_B"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "C"'] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

Quindi

$$mg_A(\lambda) = \dim V_\lambda(A) = \dim V_\lambda(D) = mg_D(\lambda)$$

Dato che

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

è diagonale, $De_i = \lambda_i e_i$ e quindi

$$mg_D(\lambda) = \#\{ i \mid \lambda_i = \lambda \} = ma_D(\lambda).$$

Viceversa, supponiamo che

$$Sp(A) \subset \mathbb{K} \quad \text{e} \quad mg(\lambda) = ma(\lambda)$$

e dimostriamo che A è diagonalizzabile.

Siano $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_K$ gli autovalori distinti di A. Chiaramente

$$V_{\lambda_i}(A) \cap V_{\lambda_j}(A) = \{0_{\mathbb{R}^n}\} \text{ se } \lambda_i \neq \lambda_j$$

(Infatti se $v \in V_{\lambda_i}(A) = V_{\lambda_j}(A)$ allora

$$\lambda_j v = Av = \lambda_i v \Rightarrow (\lambda_j - \lambda_i) v = 0_{\mathbb{K}^n}$$

$$\underset{\lambda_i \neq \lambda_j}{\Rightarrow} v = 0_{\mathbb{K}^n}.)$$

Consideriamo il sottospazio

$$W = V_{\lambda_1}(A) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_K}(A)$$

$$\dim W = mg_A(\lambda_1) + \dots + mg_A(\lambda_K)$$

$$= ma_A(\lambda_1) + \dots + ma_A(\lambda_K) = n$$

$$\Rightarrow W = \mathbb{K}^n.$$

Scegliamo una base $\mathcal{B}_i$ di $V_{\lambda_i}(A)$ $\forall i$.

$\Rightarrow \mathcal{B} = \mathcal{B}_{\lambda_1} \cup \dots \cup \mathcal{B}_{\lambda_K}$ è una base di $\mathbb{K}^n$ composta di autovettori per A. $\boxtimes$

Es: Una matrice triangolare superiore

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & u_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix} \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$$

ha come autovalori gli el. diagonali

$$Sp(U) = \{u_{11}, u_{22}, \dots, u_{nn}\} \subset \mathbb{K}$$

infatti

$$P_U(x) = \det \begin{pmatrix} x-u_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & x-u_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & x-u_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= (x-u_{11})(x-u_{22})\cdots(x-u_{nn})$$

$ma_U(u_{ii}) = \#$ volte che u_{ii} compare sulla diagonale di U.

Se questi elementi diagonali sono tutti distinti allora

$$ma_U(u_{ii}) = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow 1 \leq mg_U(u_{ii}) \leq ma_U(u_{ii}) = 1$$

$$\Rightarrow mg_U(u_{ii}) = ma_U(u_{ii})$$

$\Rightarrow U$ è diagonalizzabile su $\mathbb{K}$.

COR: Se $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ ha n autovalori distinti in $\mathbb{K}$ allora è diagonalizzabile su $\mathbb{K}$.

dim: Se $Sp(A) = \{\lambda_1 < \dots < \lambda_n\} \subset \mathbb{K}$ allora $ma_A(\lambda_i) = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow 1 \leq mg_A(\lambda_i) \leq ma_A(\lambda_i) = 1$

$\Rightarrow mg_A(\lambda_i) = ma_A(\lambda_i) \quad \forall i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow A$ è diagonalizzabile su $\mathbb{K}$.

Teorema

$\boxtimes$

Es: Trovare $a, b, c \in \mathbb{R}$ t.c.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

sia diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

Sol.: $P_A(x) = (x-a)(x-c)$.

Se $a \neq c$ A è diag. su $\mathbb{R}$.

Se $a = c$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow ma_A(a) = 2$

$$mg_A(a) = \dim \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{se } b = 0 \\ 1 & \text{se } b \neq 0 \end{cases}$$

è diag. $\Leftrightarrow b = 0$.

$\boxtimes$

Es: Stabilire se

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia trovare una base di autovettori.

Sol.:

$$P_A(x) = x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$$

$$\Rightarrow Sp(A) = \{3, -3\}$$

$\Rightarrow$ A ha due autovalori reali distinti e quindi è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

$$V_3(A) = \operatorname{Ker}(3\mathbb{1}_2 - A) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -5 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_{-3}(A) = \operatorname{Ker}(-3\mathbb{1}_2 - A) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di autovettori.

Es: Stabilire se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso

Trovare $B \in Mat_{2\times2}$ diagonalizzante

Sol.: $p_A(x) = x^2 - 5x + 6$

$$= (x-2)(x-3)$$

$Sp(A) = \{2, 3\}$. Quindi A ha due autovalori reali distinti e quindi è diagonalizzabile.

$$V_2(A) = Ker(2\mathbb{1}_2 - A) = Ker \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= Ker(1, -3) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_3(A) = Ker(3\mathbb{1}_2 - A) = Ker \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= Ker(1, -2) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è t.c. $B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$\blacksquare$

Es: Stabilire se

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia trovare una base di autovettori.

Sol.:

$$P_A(x) = x^3 - 6x^2 + \frac{1}{2}\left[36 - (6 \cdot 3)\right]x - \det A$$
$$= x^3 - 6x^2 + 9x - \det A$$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -(-3-1) = 4$$

$$P_A(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$$

Cerchiamo le radici di P_A tra i divisori di 4

$$P_A(1) = 1 - 6 + 9 - 4 = -5 + 5 = 0$$

$\Rightarrow$ 1 è una radice

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 6x^2 + 9x - 4 & x - 1 \\ \hline x^3 - x^2 & x^2 - 5x + 4 \\ -5x^2 + 9x - 4 & \\ -5x^2 + 5x & \\ 4x - 4 & \\ // & \end{array}$$

$$P_A(x) = (x-1)(x^2-5x+4)$$
$$= (x-1)(x-1)(x-4) = (x-1)^2(x-4)$$

$$ma_A(1) = 2$$

$$ma_A(4) = 1 \Rightarrow mg_A(4) = 1$$

$$V_4(A) = \mathrm{Ker}(4\mathbb{1}_3 - A) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Verifichiamo:

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$V_1(A) = \mathrm{Ker}(\mathbb{1}_3 - A) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$
$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Una base di autovettori è

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Posto $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ si ha $B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$\blacksquare$

Es: $J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in Mat_{n\times n}$ $n \geq 2$

si chiama "blocco di Jordan" di autovalore λ.

$Sp(j_n(\lambda)) = \{\lambda\}$

$ma_{j_n(\lambda)}(\lambda) = n$

$mg_{j_n(\lambda)}(\lambda) = \dim Ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & 1 \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix} = 1 < n$

Quindi $j_n(\lambda)$ non è diagonalizzabile (né su $\mathbb{R}$ né su $\mathbb{C}$).

Involuzioni

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale f.g. Una <u>involuzione lineare</u> su V è un endomorfismo lineare $T: V \to V$ t.c.

$$\boxed{T \circ T = Id_V}$$

ovvero t.c.

$$T = T^{-1}.$$

<u>Prop.</u>: Un'involuzione è diagonalizzabile.

<u>dim</u>: $\operatorname{Ker} T = \{0_V\}$. Infatti se $v \in \operatorname{Ker} T$ allora $T(v) = 0_V$ e $v = T(T(v)) = T(0_V) = 0_V$.

$\forall v \in V$

$$T(v - T(v)) = T(v) - v = -(v - T(v)) \in V_{-1}(T)$$

$$T(v + T(v)) = T(v) + v = (v + T(v)) \in V_1(T)$$

$$v = \frac{1}{2}(v + T(v)) + \frac{1}{2}(v - T(v))$$

Quindi

$$V = V_1(T) \oplus V_{-1}(T). \qquad \blacksquare$$

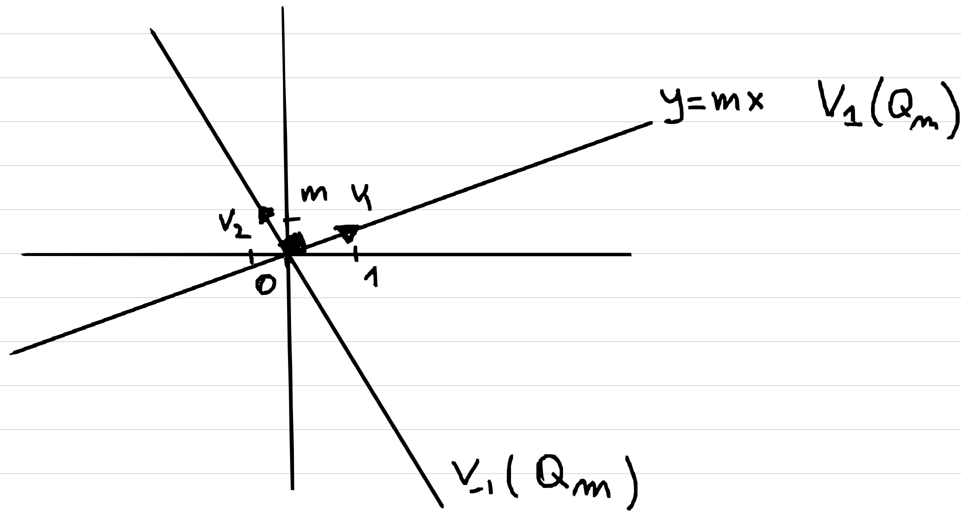
Es: La matrice di riflessione ortogonale

$$Q_m = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$$

è un'involuzione su $\mathbb{R}^2$.

Una base diagonalizzante è $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$

dove $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix}$



Proiettori o idempotenti

Un endomorfismo lineare

$$T : V \to V$$

si dice proiettore o idempotente se

$$T^2 = T.$$

Prop.: Se T è idempotente allora

$$T = pr_{\operatorname{Im} T}^{\operatorname{Ker} T}$$

e T è diagonalizzabile. I suoi autovalori sono 1 e 0 e

$$V_1(T) = \operatorname{Im} T \ , \quad V_0(T) = \operatorname{Ker} T.$$

dim: $\operatorname{Im} T \cap \operatorname{Ker} T = \{0_V\}$. Infatti, se $T(v) = \{0_V\}$ e $v = T(w)$ allora $0_V = T(v) = T(T(v)) = T(T^2(w))$

$= T(T(w)) = w \Rightarrow v = T(w) = T(0_V) = 0_V.$

Dalla formula della dimensione, segue che

$$V = \operatorname{Im} T \oplus \operatorname{Ker} V.$$

$V_1(T) = \{ v \in V \mid T(v) = v \} = \{ v \in V \mid T(T(v)) = v \} =$

$= \operatorname{Im} T$ ∎