# FORME BI-LINEARI

Dati tre spazi vettoriale $V_1, V_2, W$, una funzione

$$b: V_1 \times V_2 \longrightarrow W$$

si dice <u>bilineare</u> se

1) $b(-, v_2): V_1 \longrightarrow W$ è lineare $\forall v_2 \in V_2$

2) $b(v_1, -): V_2 \longrightarrow W$ è lineare $\forall v_1 \in V_1$

ovvero: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\forall u, v \in V_1$, $\forall u', v' \in V_2$

$$b(\alpha u + \beta v, v_2) = \alpha\, b(u, v_2) + \beta\, b(v, v_2)$$

$$b(v_1, \alpha u' + \beta v') = \alpha\, b(v_1, u') + \beta\, b(v_1, v')$$

Se $V_1 = V_2 = V$ e $W = \mathbb{R}$ allora

$$b: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

si dice una <u>forma bilineare</u>.

<u>Es</u>: $V = \mathbb{R}^n$, $A \in Mat_{n \times n}$, definiamo

$$\boxed{b_A(X, Y) = X^t A Y}$$

$b_A: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ è bilineare.

.. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$b_A(X,Y) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, x_2)\begin{pmatrix} y_1+2y_2 \\ 3y_1+4y_2 \end{pmatrix}$$

$$= x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 4x_2y_2$$

$$= \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\, x_i y_j$$

Questo vale in generale (Esercizio)

$$b_A(X,Y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i y_j$$

In particolare: $\boxed{a_{ij} = b_A(e_i, e_j)}$

Data una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di $V$ ed una forme bilineare $b : V \times V \to \mathbb{R}$ si ha: $\forall\, v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n,\ w = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$

$$\boxed{b(v,w) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j\, b(v_i, v_j)}$$

Definiamo $A_{b,\mathcal{B}} = \big(b(v_i, v_j)\big)_{i,j=1,\dots,n}$

- $A_{b,\mathcal{B}}$ si dice la matrice che rappresenta $b$ nella base $\mathcal{B}$.

Si ha:

$$b(v,w) = F_{\mathcal{B}}(v)^t A_{b,\mathcal{B}} F_{\mathcal{B}}(w)$$

$$= b_{A_{b,\mathcal{B}}}(F_{\mathcal{B}}(v), F_{\mathcal{B}}(w))$$

<u>Forme bilineari su $\mathbb{R}^n$</u>:

Sia $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bilineare, allora

$$b(X,Y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \, b(e_i, e_j)$$

$$= X^t A_b Y$$

dove

$$A_b = A_{b,e} = (b(e_i, e_j))_{i,j=1,\dots,n}$$

**Es:** $b: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$b(X,Y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3$$

Allora

$$A_b = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e $b(X,Y) = X^t A_b Y$. $\square$

**Es:** $b: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$b(X,Y) = -2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2 - x_3y_3$$

Allora

$$A_b = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Es:** $\det: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\det\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right) = ad - bc = (a, c)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

$$A_{\det} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se $\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_n\}\subset\mathbb{R}^n$ è una base

allora

$$b(X,Y)=b_{A_b}(X,Y)=X^tA_bY$$

ed anche

$$b(X,Y)=b_{A_{b,\mathcal{B}}}(F_{\mathcal{B}}(X),F_{\mathcal{B}}(Y))$$

$$=F_{\mathcal{B}}(X)^tA_{b,\mathcal{B}}F_{\mathcal{B}}(Y)$$

Come sono legate $A_b$ e $A_{b,\mathcal{B}}$ ?

<u>OSS</u> (Importante):

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "F_{e_n}=\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "B"] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

dove $B=(v_1|\cdots|v_n)$. Allora

$$\boxed{X=BF_{\mathcal{B}}(X)}$$

ed anche

$$\boxed{F_{\mathcal{B}}(X)=B^{-1}X}.$$

Si ha:

$$b(X,Y) = X^t A_b Y = \left(B F_{\mathcal{B}}(X)\right)^t A_b \left(B F_{\mathcal{B}}(Y)\right)$$

$$= F_{\mathcal{B}}(X)^t \, B^t A_b B \, F_{\mathcal{B}}(Y)$$

$$b(X,Y) = F_{\mathcal{B}}(X)^t \, A_{b,\mathcal{B}} \, F_{\mathcal{B}}(Y)$$

Quindi, $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ vale l'uguaglianza

$$F_{\mathcal{B}}(X)^t B^t A_b B \, F_{\mathcal{B}}(Y) = F_{\mathcal{B}}(X)^t A_{b,\mathcal{B}} F_{\mathcal{B}}(Y)$$

In particolare, se $X = v_i$ e $Y = v_j$:

$$e_i^t B^t A_b B e_j = e_i^t A_{b,\mathcal{B}} e_j$$

<u>OSS</u>: Se $A \in Mat_{n \times n}$ allora

$$e_i^t A e_j = a_{ij}$$

Quindi $\left(B^t A_b B\right)_{ij} = \left(A_{b,\mathcal{B}}\right)_{i,j} \quad \forall i,j$

$$\Rightarrow \boxed{B^t A_b B = A_{b,\mathcal{B}}}$$

**Def**: Due matrici $A, C \in Mat_{n \times n}$ si dicono <u>congruenti</u> se $\exists\, B \in Mat_{n \times n}$ invertibile tale che

$$C = B^t A B$$

Riformulando, possiamo quindi concludere che $A_b$ e $A_{b,\mathcal{B}}$ sono <u>congruenti</u>.

Se $\mathcal{L} = S_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è lineare e $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^n$ allora

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "F_e"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "F_e"] & \mathbb{R}^n \arrow[l, Leftarrow] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "B"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^n & \mathbb{R}^n \arrow[l, "B^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

La matrice che rappresenta $\mathcal{L}$ nella base $\mathcal{B}$ è

$$C = B^{-1} A B.$$

**Def**: Due matrici $A, C \in Mat_{n\times n}$ si dicono **coniugate** se $\exists\, B \in Mat_{n\times n}$ invertibile t.c.

$$C = B^{-1} A B$$

Riformulando, possiamo quindi dire che se $A$ e $C$ rappresentano $\mathcal{L}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare allora esse sono **coniugate**.

**Es**: $b(X,Y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$

$\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Scrivere la matrice che rappresenta $b$ nella base $\mathcal{B}$

**Sol.**: $b(X,Y) = X^t A Y \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = B F_{\mathcal{B}}(X)$

$\Rightarrow b(X,Y) = b(BF_{\mathcal{B}}(X), BF_{\mathcal{B}}(Y))$

$$= F_{\mathcal{B}}(X)^t B^t A B F_{\mathcal{B}}(Y)$$

La matrice cercata è

$$B^tAB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Posto $Z = F_{\mathcal{B}}(X) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ e $T = F_{\mathcal{B}}(Y) = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$

in queste coordinate $b$ si scrive

$6z_1^2 - 2z_2^2$. $\boxtimes$

Es: $b: \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ dato da

$$b(p,q) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1)$$

è bilineare:

$$b(\alpha p + \beta q, r) \underset{\uparrow}{=} \alpha\, b(p,r) + \beta\, b(q,r)$$

(Esercizio)

Inoltre, $b(p,q) = b(q,p)$ quindi $b$ è lineare anche nella seconda variabile.

Troviamo la matrice che rappresenta $b$ in $\mathcal{E}_2 = \{1, x, x^2\}$

| | | |
|---|---|---|
| $b(1,1)=3$ | $b(1,x)=0$ | $b(1,x^2)=2$ |
| $0$ | $b(x,x)=2$ | $b(x,x^2)=0$ |
| $2$ | $0$ | $b(x^2,x^2)=2$ |

$$\Rightarrow A_{b,\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

# Forme bilineari simmetriche

Sia $V$ un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e sia $b: V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare su $V$.

$b$ si dice simmetrica se $b(v,w) = b(w,v)$ $\forall v, w \in V$.

In tutta questa sezione $b$ denota una forma bilineare simmetrica di $V$.

Es: $V = \mathbb{K}^n$, $b = b_A$ con $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$. Allora $b$ è simmetrica se e solo se $A = A^t$ è simmetrica

Es: $V = \mathbb{K}[X]_{\leq n}$, $t_0, \dots, t_m \in \mathbb{K}$. La forma su $V$

$$b(p(x), q(x)) = p(t_0)q(t_0) + p(t_1)q(t_1) + \dots + p(t_n)q(t_n)$$

è bilineare e simmetrica e si denota $b_{t_0, \dots, t_m}$.

Es: $V = \mathcal{C}^0([-\pi, \pi], \mathbb{R})$, la forma

$$b(f,g) = (f|g)_{L^2} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx$$

è bilineare e simmetrica.

In questa sezione vogliamo dimostrare che esiste una base ortogonale di $(V, b)$ se $V$ è finitamente generato.

## Nucleo della forma

Il nucleo della forma bilineare e simmetrica $b$ è il sottoinsieme $\operatorname{Ker} b$ definito come

$$\operatorname{Ker}(b) = \{v \in V \mid b(v,w) = 0 \quad \forall w \in V\}$$

che quindi consiste di quei vettori che sono ortogonali ad ogni vettore.

Oss: Se $V = \mathbb{K}^n$, $b = b_A$ $(A = A^t)$, allora

$$\operatorname{Ker} b = \operatorname{Ker} A$$

Infatti, se $X \in \operatorname{Ker} b$, allora $b(X, e_i) = 0$ $\forall i = 1, \dots, n$

e quindi $0 = X^t A e_i = X^t A^i$ $\forall i = 1, \dots, n$

e quindi $X^t A = 0_{1 \times n} \Rightarrow X^t \in \operatorname{Ker} D_A$

$\Rightarrow X \in \operatorname{Ker} A^t$.

Viceversa, se $AX = 0_n$ allora $Y^t A X = 0$ $\forall Y$. ∎

Es: $V = \mathbb{K}[x]_{\leq n}$, $t_0, \dots, t_m \in \mathbb{K}$ distinti, allora

$$\operatorname{Ker} b_{t_0, \dots, t_m} = \{p(x) \in V \mid p(t_0) = p(t_1) = \dots = p(t_m) = 0\}$$

Infatti, se $p(x) \in \operatorname{Ker} b_{t_0, \dots, t_m}$ allora

$$b\big(p(x), (x-t_0)\cdots(x-t_{i-1})(x-t_{i+1})\cdots(x-t_m)\big) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Se $v \in \operatorname{Ker} b$ allora in particolare $b(v,v)=0$.

<u>Notazione</u> : $v^2 := b(v,v)$.

<u>Def</u>: Un vettore $v \in V$ si dice <u>isotropo</u> se $v^2 = 0$.

<u>oss</u>: $\operatorname{Ker} b$ è un sottospazio vettoriale di $V$

Infatti, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall v_1, v_2 \in \operatorname{Ker} b$, $\forall v \in V$

$$b(\alpha v_1 + \beta v_2, v) = \alpha\, b(v_1, v) + \beta\, b(v_2, v) = \alpha 0_V + \beta 0_V = 0.$$

<u>Def</u>: La dimensione di $\operatorname{Ker} b$ si dice la <u>nullità</u> della forma.

<u>Def</u>: Se $\dim \operatorname{Ker} b = 0$ allora $b$ si dice <u>non-degenere</u>.

<u>oss</u>: $b$ non-degenere $\Leftrightarrow$ l'unico vettore ortogonale a tutti i vettori è $0_V$.

<u>Es</u>: $V = \mathbb{R}^3$, $b = b_A$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Per l'osservazione precedente

$$\operatorname{Ker} b = \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\Rightarrow$ $b$ è degenere.

# L'ortogonale di un sottospazio

Sia $U \subset V$ un sottospazio vettoriale di $V$.

Definiamo l'<u>ortogonale</u> di $U$ come

$$U^\perp := \{ v \in V \mid b(v, u) = 0 \quad \forall u \in U \}.$$

<u>Oss</u>: $U^\perp$ è un sottospazio vettoriale di $V$:

Infatti, $\forall v_1, v_2 \in U^\perp$, $\forall \alpha, \beta \in U$ $\quad \forall u \in U$

$$b(\alpha v_1 + \beta v_2, u) = \alpha\, b(v_1, u) + \beta\, b(v_2, u) = \alpha 0 + \beta 0 = 0.$$

<u>Es</u>: $V = \mathbb{R}^3$, $b = b_A$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \langle e_2 \rangle$.

Allora $U^\perp = \{ X \in \mathbb{R}^3 \mid e_2^t A X = 0 \} = \{ X \in \mathbb{R}^3 \mid A_2 X = 0 \}$

$$= \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

osserviamo che $\ker b = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset U^\perp$ e che

$\dim U + \dim U^\perp = \dim \mathbb{R}^3$.

Se $U = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \ker b$, allora $U^\perp = \mathbb{R}^3$

e $\dim U + \dim U^\perp \neq \dim \mathbb{R}^3$.

## Restrizione di b a sottospazi vettoriali

Sia $U \subset V$ un sottospazio vettoriale di $V$.

La restrizione di b a U è la funzione

$$b|_U : U \times U \to \mathbb{K} : (u_1, u_2) \mapsto b(u_1, u_2).$$

Osserviamo che $b|_U$ è bilineare e simmetrica.

Osserviamo inoltre che $\boxed{\operatorname{Ker} b|_U = U \cap U^\perp}$

Infatti, $u \in \operatorname{Ker} b|_U \iff u$ è ortogonale a tutti i vettori di $U$.

Es: $V = \mathbb{R}^3$, $b = b_A$, dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$U = \pi : x_1 + x_3 = 0$. Allora

$$U^\perp = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid X^t A Y = 0 \quad \forall Y \in U\}$$

$$= \{X \in \mathbb{R}^3 \mid X^t \begin{pmatrix} y_2 \\ 2y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \forall y_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{X \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$U \cap U^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \operatorname{Ker} b = \operatorname{Ker} b|_U.$$

## Teorema di decomposizione ortogonale

Sia $U \subset V$ un sottospazio vettoriale t.c. $b|_U$ è non-degenere. Allora $V = U \oplus U^\perp$. In particolare,

$$\dim U^\perp = \dim V - \dim U.$$

<u>dim</u>: Per ipotesi, $U \cap U^\perp = \operatorname{Ker} b|_U = \{0_V\}$.

Dimostriamo che $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$:

Sia $\mathcal{B}_U = \{u_1, .., u_r\}$ una base di $U$.

Consideriamo la funzione

$$F : V \longrightarrow \mathbb{K}^r$$

data da $F(v) = \begin{pmatrix} b(v, u_1) \\ b(v, u_2) \\ \vdots \\ b(v, u_r) \end{pmatrix}$.

(Notiamo che $F$ dipende dalla scelta della base $\mathcal{B}_U$).

Osserviamo che $F$ è lineare:

$$F(\alpha v_1 + \beta v_2) = \begin{pmatrix} b(\alpha v_1 + \beta v_2, u_1) \\ b(\alpha v_1 + \beta v_2, u_2) \\ \vdots \\ b(\alpha v_1 + \beta v_2, u_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha b(v_1, u_1) + \beta b(v_2, u_2) \\ \alpha b(v_1, u_2) + \beta b(v_2, u_2) \\ \vdots \\ \alpha b(v_1, u_r) + \beta b(v_2, u_r) \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} b(v_1, u_1) \\ \vdots \\ b(v_1, u_r) \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b(v_2, u_1) \\ \vdots \\ b(v_2, u_r) \end{pmatrix} = \alpha F(v_1) + \beta F(v_2).$$

$\forall v_1, v_2 \in V$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, Osserviamo che $\underline{\operatorname{Ker} F = U^\perp}$:

Infatti, $v \in \operatorname{Ker} F \iff b(v, u_i) = 0 \;\; \forall i = 1, \dots, r$

$B_U$ è una base

$\iff \quad F(v, u) = 0 \;\; \forall u \in U \iff v \in U^\perp$.

Osserviamo infine che $F$ è suriettiva:

infatti, consideriamo le immagini di $B_U$:

$F(u_1), \dots, F(u_r) \in \mathbb{K}^r$. Essi sono lin. Ind.: infatti

$x_1 F(u_1) + \dots + x_r F(u_r) = 0_{\mathbb{K}^r} \iff F(x_1 u_1 + \dots + x_r u_r) = 0_{\mathbb{K}^r}$

$\iff x_1 u_1 + \dots + x_r u_r \in \operatorname{Ker} F$. Quindi

$x_1 u_1 + \dots + x_r u_r \in \operatorname{Ker} F \cap U = U^\perp \cap U = \{0_V\}$

$\iff x_1 = \dots = x_r = 0$.

Teo della dimensione

Quindi, $\dim U^\perp = \dim \operatorname{Ker} F = \dim V - r = \dim V - \dim U$.

$\blacksquare$

Sia $U \subset V$ un sottospazio vettoriale di $V$.

Osserviamo che

$$\boxed{\operatorname{Ker} b|_U = U \cap \operatorname{Ker} b}$$

Infatti, per il Teorema di decomposizione ortogonale $V = U \oplus U^\perp$. Sia $u \in \operatorname{Ker} b|_U$, sia $v \in V$. Allora $\exists!\, u_1 \in U$ e $\exists!\, u_2 \in U^\perp$ t.c. $v = u_1 + u_2$. Otteniamo

$$b(u,v) = b(u,u_1) + b(u,u_2) \underset{u_2 \in U^\perp}{=} b|_U(u,u_1) = 0$$

Quindi $u \in \operatorname{Ker} b$. Viceversa, se $u \in U \cap \operatorname{Ker} b$ allora $b(u,u_2) = 0 \quad \forall u_2 \in U$ e quindi $u \in \operatorname{Ker} b|_U$.

Es: Sia $\pi : x + z = 0$ in $V = \mathbb{R}^3$. Sia $b = b_A$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calcolare $\operatorname{Ker} b|_\pi$.

Sol.: $\operatorname{Ker} b = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \pi$. Quindi

$\operatorname{Ker} b|_\pi = \operatorname{Ker} b \cap \pi = \operatorname{Ker} b = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. $\square$

Possiamo adesso dimostrare l'esistenza di una base ortogonale di $(V, b)$.

Teorema (di esistenza di basi ortogonali)

Sia $V$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ dotato di una forma bilineare simmetrica $b: V \times V \to \mathbb{K}$.

Allora esiste una base ortogonale di $(V, b)$.

dim: Se $\mathrm{Ker}\, b = V$ allora ogni base di $V$ è ortogonale. Supponiamo $\mathrm{Ker}\, b \subsetneq V$.

Scegliamo un complementare $U$ di $\mathrm{Ker}\, b$ in $V$:

$$V = U \oplus \mathrm{Ker}\, b.$$

Sia $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}\, b} = \{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ una base di $\mathrm{Ker}\, b$.

Sia $\mathcal{B}_U = \{v_1, \dots, v_r\}$ una base di $U$.

Notiamo che $b|_U$ è non-degenere, perché $\mathrm{Ker}\, b|_U = \mathrm{Ker}\, b \cap U = \{0_V\}$.

Se $\mathcal{B}_U$ è una base ortogonale di $(U, b|_U)$ allora $\mathcal{B} = \mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_{\mathrm{Ker}\, b}$ è una base ortogonale di $(V, b)$.

Dimostriamo quindi che $(U, b|_U)$ ha una base ortogonale. Se $\mathcal{B}_U$ è ortogonale, abbiamo finito. Supponiamo che $\mathcal{B}_U$ non sia ortogonale.

Esiste un vettore $u_1 \in U$ non isotropo.

Infatti, se $v_i^2 = 0$ $\forall i$, dato che $\mathcal{B}_U$ non è ortogonale, $\exists$ $i \neq j$ t.c. $b(v_i, v_j) \neq 0$. Allora $u_1 := v_i + v_j$ non è isotropo. Infatti,

$$u_1^2 = (v_i + v_j)^2 = v_i^2 + v_j^2 + 2\, b(v_i, v_j) = 2\, b(v_i, v_j) \neq 0.$$

Consideriamo il sottospazio : $\langle u_1 \rangle^\perp \cap U$.

Osserviamo che $\dim \langle u_1 \rangle^\perp \cap U < \dim U$.

Sia $u_2 \in \langle u_1 \rangle^\perp \cap U$ un vettore non-isotropo (esiste per il ragionamento precedente). Ripetiamo: consideriamo $\langle u_2 \rangle^\perp \cap \langle u_1 \rangle^\perp$ e troviamo $u_3 \in \langle u_2 \rangle^\perp \cap \langle u_1 \rangle^\perp$ non isotropo.

Continuando così si trova una base ortogonale di $(U, b|_U)$. $\blacksquare$

Es: Sia $V=\mathbb{R}^3$, $b=b_A$ con $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

Trovare una base ortogonale di $(V,b)$.

Sol.: $\operatorname{Ker} b = \operatorname{Ker} A = \left\langle \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$.

Scegliamo un complementare, ad esempio

$U: x+y-z=0$.

Sia $\mathcal{B}_U = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ una base di $U$

$$v_1^2 = (-1,1,0)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = (-1,1,0)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Quindi $u_1 = v_1$ è non-isotropo.

$$\langle u_1\rangle^\perp = \{X\in\mathbb{R}^3 \mid X^t A v_1 = 0\}$$
$$= \left\{X\in\mathbb{R}^3 \mid X^t \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 0\right\}$$
$$= \left\{X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid y=0\right\} = \langle e_1, e_3\rangle$$

$$\langle u_1\rangle^\perp \cap U = \left\{X\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix}x+y-z=0\\ y=0\end{matrix}\right\} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

$u_2 := \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. Una base ortogonale di $(U, b|_U)$ è $\{u_1, u_2\}$. Quindi una base ortogonale di $(V,b)$ è

$$\{u_1, u_2, v_3\}$$

dove $v_3 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ è un generatore di $\operatorname{Ker} b$.

**Es**: $V=\mathbb{R}^3$, $b=b_A$, $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

Trovare una base ortogonale di $(V,b)$.

**Sol.**: $\operatorname{Ker} b = \operatorname{Ker} A$.

$\det A = \det\begin{pmatrix}0&0&1\\1&-1&1\\1&1&0\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix} = 2 \neq 0$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} b = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \Rightarrow b$ è non-degenere.

Troviamo un vettore $u \in U = V$ non isotropo.

Notiamo che $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 0$ ma $b_A(e_1,e_2) = a_{12} = 1 \neq 0$.

Quindi $u_1 = e_1+e_2$ non è isotropo (v. dim. Teorema).

$\langle u_1\rangle^\perp = \{X\in\mathbb{R}^3 \mid X^t A u_1 = 0\} = \{X \mid X^t \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = 0\}$

$= \{X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1+x_2+2x_3=0\} = \langle \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\rangle$

Cerchiamo $u_2 \in \langle u_1\rangle^\perp$ non isotropo: ad esempio

$u_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$. Infatti, $u_2^2 = (-1,1,0)\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = -2 \neq 0$.

Cerchiamo $u_3 \in \langle u_1\rangle^\perp \cap \langle u_2\rangle^\perp$ non isotropo:

$\langle u_2\rangle^\perp = \{X \mid X^t \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = 0\} = \{X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mid x_1 - x_2 = 0\}$

$\langle u_1\rangle^\perp \cap \langle u_2\rangle^\perp : \begin{cases} x_1+x_2+2x_3=0 \\ x_1-x_2=0\end{cases} = \langle \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\rangle$. $u_3 = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\{u_1,u_2,u_3\}$ è una base ortogonale di $(\mathbb{R}^3, b_A)$.

OSS: La matrice che rappresenta $b$ in una base ortogonale $\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$ di $(V,b)$ è diagonale ed è

$$D=\begin{pmatrix} v_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & v_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & v_n^2 \end{pmatrix}.$$

Nell'esempio precedente: $(\mathbb{R}^3, b_A)$, $A=\begin{pmatrix} 0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

$\mathcal{B}=\{u_1,u_2,u_3\}$, $u_1^2=2\,b_A(e_1,e_2)=2$, $u_2^2=-2$,

$$u_3^2=(-1,-1,1)\begin{pmatrix} 0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=(-1,-1,1)\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}=-2$$

La matrice che rappresenta $b$ nella base $\mathcal{B}$ è

$$D=\begin{pmatrix} 2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

# Forme bilineari simmetriche reali

Sia $V$ uno spazio vettoriale f.g. su $\mathbb{R}$, sia $b: V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica a valori in $\mathbb{R}$ (e quindi si chiama "reale").

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortogonale di $(V, \mathcal{B})$.

Dividiamo $\mathcal{B}$ come $\mathcal{B} = \mathcal{B}^+ \cup \mathcal{B}^- \cup \mathcal{B}^0$ dove

$$\mathcal{B}^+ = \{ v_i \in \mathcal{B} \mid v_i^2 > 0 \}$$

$$\mathcal{B}^- = \{ v_i \in \mathcal{B} \mid v_i^2 < 0 \}$$

$$\mathcal{B}^0 = \{ v_i \in \mathcal{B} \mid v_i^2 = 0 \}.$$

Sia $p = |\mathcal{B}^+|$, $q = |\mathcal{B}^-|$. Allora $|\mathcal{B}^0| = n - p - q$.

La coppia $(p, q)$ si chiama la <u>segnatura</u> della base ortogonale $\mathcal{B}$.

<u>Es</u>: $V = \mathbb{R}^3$, $b = b_A$ con $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$\mathcal{B} = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Poiché $u_1^2 = 2$, $u_2^2 = u_3^2 = -2$ la segnatura di $\mathcal{B}$ in $(V, b)$ è $(1, 2)$.

**Teorema** (di Sylvester o di inerzia)

Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ due basi ortogonali di $(V,b)$.
Allora $|\mathcal{B}^+|=|\mathcal{C}^+|$, $|\mathcal{B}^-|=|\mathcal{C}^-|$ e $|\mathcal{B}^0|=|\mathcal{C}^0|=\dim \operatorname{Ker} b$.

Il Teorema di Sylvester ci dice che
"La segnatura di una base ortogonale non dipende dalla base ortogonale".
Possiamo quindi dare la seguente

**Definizione**: La segnatura di una forma bilineare reale $b$ è la coppia $(p,q)$ dove $p=|\mathcal{B}^+|$ e $q=|\mathcal{B}^-|$ per una base ortogonale $\mathcal{B}$ di $(V,b)$. Notazione:

$$sg(b)=(p,q).$$

Es: $V=\mathbb{R}^3$, $b=b_A$ $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$,

$$sg(b)=(1,2).$$

dim (del Teorema di Sylvester)

Poniamo $V_{\mathcal{B}}^{+} = \langle \mathcal{B}^{+} \rangle$, $V_{\mathcal{B}}^{-} = \langle \mathcal{B}^{-} \rangle$, $V_{\mathcal{B}}^{0} = \langle \mathcal{B}^{0} \rangle$

Quindi $V = V_{\mathcal{B}}^{+} \oplus V_{\mathcal{B}}^{-} \oplus V_{\mathcal{B}}^{0}$ e questa decomposizione è ortogonale nel senso che $\forall v^{+} \in V_{\mathcal{B}}^{+}, \forall v^{-} \in V_{\mathcal{B}}^{-}, \forall v^{0} \in V_{\mathcal{B}}^{0}$

$b(v^{+}, v^{-}) = b(v^{+}, v^{0}) = b(v^{-}, v^{0}) = 0$.

OSS: Sia $v \in V_{\mathcal{B}}^{+}$, $v = \sum_{v_i \in \mathcal{B}^{+}} x_i v_i$. Allora

$$v^2 = \sum x_i^2 v_i^2 \geq 0, \text{ e } v^2 = 0 \iff v = 0_V$$

Similmente, $v \in V_{\mathcal{B}}^{-}$, $v = \sum_{v_i \in \mathcal{B}^{-}} x_i v_i$, allora

$$v^2 = \sum x_i^2 v_i^2 \leq 0, \text{ e } v^2 = 0 \iff v = 0_V.$$

Dimostriamo per prima cosa che

$$V_{\mathcal{B}}^{0} = V_{e}^{0} = \operatorname{Ker} b.$$

Sia $v \in \operatorname{Ker} b$. Poniamo $v = v^{+} + v^{-} + v^{0}$ con $v^{+} \in V_{\mathcal{B}}^{+}$, $v^{-} \in V_{\mathcal{B}}^{-}$ e $v^{0} \in V_{\mathcal{B}}^{0}$. Allora

$$0 = b(v, v^{+}) = (v^{+})^2 \overset{\text{OSS}}{\Longrightarrow} v^{+} = 0_V$$

$$0 = b(v, v^{-}) = (v^{-})^2 \overset{\text{OSS}}{\Longrightarrow} v^{-} = 0_V$$

$\Rightarrow v = v^{0} \in V_{\mathcal{B}}^{0} \Rightarrow \operatorname{Ker} b \subseteq V_{\mathcal{B}}^{0}$.

Viceversa, se $v \in V_{\mathcal{B}}^{0}$, allora per ogni $w \in V$, scriviamo $w = w^+ + w^- + w^0$

con $w^+ \in V_{\mathcal{B}}^+$, $w^- \in V_{\mathcal{B}}^-$ e $w^0 \in V_{\mathcal{B}}^0$ e otteniamo

$b(v,w) = b(v,w^+) + b(v,w^-) + b(v,w^0) = 0$

$\Rightarrow v \in \operatorname{Ker} b$.

Quindi, $V_{\mathcal{B}}^0 = V_{\mathcal{C}}^0 = \operatorname{Ker} b$.

Siano $p = |\mathcal{B}^+| = \dim V_{\mathcal{B}}^+$, $q = |\mathcal{B}^-| = \dim V_{\mathcal{B}}^-$,

$p' = |\mathcal{C}^+| = \dim V_{\mathcal{C}}^+$, $q' = |\mathcal{C}^-| = \dim V_{\mathcal{C}}^-$.

Osserviamo che $V_{\mathcal{B}}^+ \cap V_{\mathcal{C}}^- = \{0_V\}$. Infatti

se $v \in V_{\mathcal{B}}^+ \cap V_{\mathcal{C}}^-$ allora $v^2 \geq 0$ (perché $v \in V_{\mathcal{B}}^+$)

e $v^2 \leq 0$ (perché $v \in V_{\mathcal{C}}^-$). Quindi $v^2 = 0$

e per l'osservazione, $v = 0_V$.

Quindi, $\dim(V_{\mathcal{B}}^+ + V_{\mathcal{C}}^- + V_{\mathcal{B}}^0) = p + q' + (n-p-q) \leq n$

$\Rightarrow q' \leq q$.

Similmente, $V_{\mathcal{C}}^+ \cap V_{\mathcal{B}}^- = \{0_V\}$ e quindi

$\dim(V_{\mathcal{C}}^+ + V_{\mathcal{B}}^- + V_{\mathcal{C}}^0) = p' + q + (n-p'-q') \leq n$

$\Rightarrow q \leq q'$.

Segue che $q = q'$ e $p = p'$. $\blacksquare$

# Basi di Sylvester

Una base di Sylvester di $(V, s)$ è una base $\mathcal{S} = \{E_1, \dots, E_n\}$ di $V$ t.c.

1) $\mathcal{S}$ è ortogonale, i.e. $s(E_i, E_j) = 0$ $i \neq j$
2) $|E_i^2| = 1$ oppure $E_i^2 = 0$.

Per ottenere una base di Sylvester:

se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortogonale allora si considerino i vettori

$$E_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{v_i^2}} v_i & \text{se } v_i^2 > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-v_i^2}} v_i & \text{se } v_i^2 < 0 \\ v_i & \text{se } v_i^2 = 0 \end{cases}$$

allora se $E_i^2 \neq 0$ si ha

$$E_i^2 = \frac{v_i^2}{|v_i^2|} = \begin{cases} 1 & \text{se } v_i^2 > 0 \\ -1 & \text{se } v_i^2 < 0 \end{cases}$$

Es (precedente): $E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} u_1$, $E_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} u_2$, $E_3 = u_3$

allora $E_1^2 = -1$, $E_2^2 = 1$, $E_3^2 = 0$.

Sia $\mathcal{S} = \{E_1, \dots, E_n\}$ una base di Sylvester di $(V, b)$ e supponiamo che sia ordinata in modo che $\mathcal{S}^+$ sia all'inizio, $\mathcal{S}^-$ in mezzo e $\mathcal{S}^0$ alla fine:

$$\mathcal{S}^+ = \{E_1, \dots, E_p\}$$

$$\mathcal{S}^- = \{E_{p+1}, \dots, E_{p+q}\}$$

$$\mathcal{S}^0 = \{E_{p+q+1}, \dots, E_n\}$$

allora la matrice associata a $b$ in $\mathcal{S}$ è

$$S = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_q & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-p-q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

e si chiama matrice di Sylvester di $b$.

Def: $b$ si dice

1) Definita positiva se $sg(b) = (n, 0)$
2) Semi-definita positiva se $sg(b) = (p, 0)$, $p < n$.
3) Semi-definita negativa se $sg(b) = (0, q)$, $q < n$
4) Definita negativa se $sg(b) = (0, n)$

$b$ si dice indefinita negli altri casi.

Osserviamo che se $b$ è definita (positiva o negativa) allora $b$ è non-degenere, ovvero $\operatorname{Ker} b = \{0_V\}$.

Se $b$ è semi-definita (positiva o negativa) allora $b$ è degenere, ovvero $\operatorname{Ker} b \neq \{0_V\}$.

Es: $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, $b = b_{0,1,2}$ ovvero

$b(p(x), q(x)) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$.

Osserviamo che

$\operatorname{Ker} b = \{ p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \mid p(0) = p(1) = p(2) = 0 \}$

e quindi $\operatorname{Ker} b = \{0_V\}$ e $b$ è non-degenere.

Consideriamo la base dei polinomi di Lagrange

$$S = \left\{ \frac{(x-1)(x-2)}{2}, -x(x-2), \frac{x(x-1)}{2} \right\}$$

allora $S$ è una base di Sylvester

e la segnatura di $b$ è $(3,0)$.

Quindi $b$ è definita positiva.

# Segnatura di una matrice simmetrica

Sia $V = \mathbb{R}^n$ e $b = b_A$ con $A = A^t \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$.

La <u>segnatura</u> di $A$ è per definizione la segnatura di $b_A$:

$$sg(A) := sg(b_A).$$

<u>Es</u>: $sg\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (1,1)$

<u>Es</u>: $sg\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (1,0)$

Es: $sg\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (2,0)$

Ricordiamo che se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono due basi di $\mathbb{R}^n$, allora le matrici $A_{b,\mathcal{B}}$ e $A_{b,\mathcal{B}'}$ che rappresentano $b$ in $\mathcal{B}$ ed in $\mathcal{B}'$ rispettivamente, soddisfano

$$\boxed{B^t A_{b,\mathcal{B}'} B = A_{b,\mathcal{B}}}$$

(<u>sono congruenti</u>)

dove $B$ è la matrice di cambio di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ $\left(\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] & \bullet \arrow[d, "F_{\mathcal{B}'}"] \\ \bullet \arrow[r, "B"'] & \bullet \end{tikzcd}\right)$.

Teorema (Classificazione delle matrici simmetriche a meno di congruenza)

Due matrici simmetriche $n \times n$ sono congruenti se e solo se hanno la stessa segnatura.

dim: Siano $A, A' \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ due matrici simmetriche della stessa taglia.

Supponiamo che $A$ ed $A'$ siano congruenti.

Allora, per definizione, esiste $B$ invertibile t.c. $B^t A' B = A$.

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortogonale di $(\mathbb{R}^n, b_A)$

Allora

$b_A(w_i, w_j) = w_i^t A w_j = w_i^t B^t A' B w_j = b_{A'}(Bw_i, Bw_j)$.

Quindi $B\mathcal{B} = \{Bw_1, Bw_2, \dots, Bw_n\}$ è una base ortogonale di $(\mathbb{R}^n, b_{A'})$ ; inoltre

$$b_A(w_i, w_i) = b_A(Bw_i, Bw_i)$$

e quindi $sg(A) = sg(b_A) = sg(b_{A'}) = sg(A')$.

Viceversa, supponiamo che $sg(A) = sg(A') = (p,q)$

Sia $\mathcal{S} = \{E_1, .., E_n\}$ una base di Sylvester di $(\mathbb{R}^n, b_A)$ e sia $\mathcal{S}' = \{E_1', .., E_n'\}$ una base di Sylvester di $(\mathbb{R}^n, b_{A'})$ e sia $S = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & & \\ & -\mathbb{1}_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ la matrice di Sylvester di $b_A$ ed di $b_{A'}$.

Allora, consideriamo le matrici

$$B = (E_1 | \cdots | E_n) \quad e \quad C = (E_1' | \cdots | E_n')$$

di cambiamento di base dalla base canonica a $\mathcal{S}$ e ed $\mathcal{S}'$, rispettivamente.

Otteniamo

$$B^t A B = S = C^t A' C$$

da cui

$$A = (B^t)^{-1} C^t A' C B^{-1} = (CB^{-1})^t A' (CB^{-1})$$

e quindi $A$ ed $A'$ sono congruenti.

**Es:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$

Stabilire se $A$ ed $A'$ sono congruenti e nel caso lo siano trovare $B_0$ invertibile tale che $B_0^t A' B_0 = A$

**Sol.:** $\operatorname{Ker} A = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$, $\operatorname{Ker} A' = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$

$\mathcal{B} = \{ v_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \}$ è una base ortogonale di $(\mathbb{R}^2, b_A)$; $v_1^2 = b_A(e_1, e_1) = a_{11} = 1 > 0$

$\Rightarrow$ $sg(A) = (1, 0)$.

$\mathcal{B}' = \{ v_1' = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \}$ è una base ortogonale di $(\mathbb{R}^2, b_{A'})$; $v_1'^2 = b_A(e_1, e_1) = a'_{11} = 2 > 0$

$\Rightarrow$ $sg(A') = (1, 0) = sg(A)$

$\Rightarrow$ $A$ ed $A'$ sono congruenti.

Una base di Sylvester per $b_A$ è

$$\mathcal{S} = \mathcal{B} = \{ E_1 = e_1, E_2 = v_2 \}$$

una base di Sylvester per $b_{A'}$ è

$$\mathcal{S}' = \{ E_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1, E_2' = v_2' \}$$

Poniamo

$$B = (E_1 | E_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = (E_1' | E_2') = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

allora

$$B_0 = C B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} - 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Verifichiamo

$$B_0^t A' B_0 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} - 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} - 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} - 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A.$$