

Geometria affine di $\mathbb{R}^3$

I sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$ sono punti, rette o piani.

Rette: Sia r una retta di $\mathbb{R}^3$. Allora

- le equazioni parametriche di r sono

$$r = X_0 + \langle v \rangle, v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

- le equazioni cartesiane di r sono

$$r: \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases} \quad \text{con} \quad \text{rg} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$$

Piani: Sia π un piano di $\mathbb{R}^3$. Allora

- le equazioni parametriche di π sono

$$\pi = X_0 + \langle v_1, v_2 \rangle \quad \text{con} \quad \text{rg}(v_1 | v_2) = 2$$

- le equazioni cartesiane di π sono

$$\pi: ax+by+cz=d \quad \text{con} \quad \text{rg}(a, b, c) = 1.$$

Condizioni di parallelismo di due rette di $\mathbb{R}^3$

1.) Due rette di $\mathbb{R}^3$

$$r = X_0 + \langle v_1 \rangle \text{ e } s = Y_0 + \langle v_2 \rangle$$

sono parallele se e solo se $\text{rg}(v_1/v_2) = 1$

2.) Due rette di $\mathbb{R}^3$

$$r: \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases} \text{ e } s = Y_0 + \langle v_2 \rangle$$

sono parallele se e solo se v_2 è soluzione

del sistema omogeneo $\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \end{cases}$.

3.) Due rette di $\mathbb{R}^3$

$$r: \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases} \text{ e } s: \begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma z=\delta \\ \alpha'x+\beta'y+\gamma'z=\delta' \end{cases}$$

sono parallele se e solo se i sistemi omogenei

$$r_0: \begin{cases} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \end{cases} \text{ e } s_0: \begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma z=0 \\ \alpha'x+\beta'y+\gamma'z=0 \end{cases}$$

sono equivalenti se e solo se $\exists T$ invertibile t.c.

$$\text{rref} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = \text{rref} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix}$$

Es: Le due rette

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

sono parallele, perché i loro vettori direzionali sono proporzionali.

Es: Le due rette

$$r: \begin{cases} x+y=3 \\ 2x+z=3 \end{cases} \quad \text{e} \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

sono parallele perché $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ è soluzione del sistema omogeneo $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+z=0 \end{cases}$

$$\frac{1}{2} - 2 = \frac{1-4}{2} = -\frac{3}{2}$$

Es: Le due rette

$$r: \begin{cases} x+y=3 \\ 2x+z=3 \end{cases} \quad \text{e} \quad s = \begin{cases} x-y+z=-1 \\ 2x+y+\frac{1}{2}z=\frac{11}{2} \end{cases}$$

Troviamo rref delle matrici dei coefficienti:

$$A_r = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} = \text{rref}(A_r)$$

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} = \text{rref}(A_s)$$

Poiché $\text{rref}(A_r) = \text{rref}(A_s)$, r ed s sono parallele.

Condizioni di incidenza di due rette di $\mathbb{R}^3$

a) Due rette di $\mathbb{R}^3$

$$r = X_0 + \langle v_1 \rangle \quad e \quad s = Y_0 + \langle v_2 \rangle$$

sono incidenti (ovvero $r \cap s \neq \emptyset$) se e solo se

$$X_0 - Y_0 \in \langle v_1, v_2 \rangle$$

se e solo se il sistema $(v_1 | v_2) X = X_0 - Y_0$

è risolubile se e solo se

$$\text{rg}(v_1 | v_2) = \text{rg}(v_1 | v_2 | X_0 - Y_0) = r$$

In questo caso,

$$r \equiv s \iff r = 1$$

$$r \cap s = \{P_0\} \iff r = 2$$

Il punto di intersezione P_0 è dato da

$$P_0 = X_0 + t_1 v_1 = Y_0 + t_2 v_2$$

dove $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$ è l'unica soluzione del

sistema $(-v_1 | v_2) X = X_0 - Y_0$ ovvero

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = (-v_1 | v_2)^{-1} (X_0 - Y_0).$$

NB: Attenzione al segno di v_1 !

Es: Stabilire la posizione reciproca di

$$r = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad e \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle$$

$\text{"}X_0\text{"}$ $\text{"}v_1\text{"}$ $\text{"}Y_0\text{"}$ $\text{"}v_2\text{"}$

Sol.:

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(v_1 | v_2 | X_0 - Y_0) &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow r \cap s = \{P_0\}$. Dato che $P_0 \in r \cap s$, $\exists t_1, t_2$ t.c.

$$P_0 = X_0 + t_1 v_1 = Y_0 + t_2 v_2$$

dove quindi t_1 e t_2 sono gli unici numeri t.c.

$$X_0 - Y_0 = -t_1 v_1 + t_2 v_2$$

ovvero sono l'unica soluzione del sistema

$$(-v_1 | v_2) X = X_0 - Y_0$$

Risolviamolo:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & -5 \\ 1 & -4 & -5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P_0 =$$

$$\Rightarrow P_0 = X_0 - v_1 = Y_0 + v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

.) Due rette di $\mathbb{R}^3$

$$r: \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases} \quad e \quad s = Y_0 + \langle v_2 \rangle$$

si intersecano se e solo se $\exists t \in \mathbb{R}$ t.c. $Y_0 + tv_2$ è soluzione del sistema che definisce r .

Se poniamo $A_z = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ e $\underline{b} = \begin{pmatrix} d \\ d' \end{pmatrix}$ allora

$Y_0 + tv$ è soluzione di $A_z X = \underline{b}$ se e solo se

$$A_z(Y_0 + tv_2) = \underline{b} \quad \Leftrightarrow \quad e \quad solo \quad se$$

$$t(A_z v_2) = \underline{b} - A_z Y_0 \quad \Leftrightarrow \quad e \quad solo \quad se \quad il \quad sistema$$

$$(A_z v_2)t = \underline{b} - A_z Y_0 \quad \text{è risolubile se e solo se}$$

$$\text{rg}(A_z v_2) = \text{rg}(A_z v_2 \mid \underline{b} - A_z Y_0).$$

In questo caso:

$$r \equiv s \Leftrightarrow \text{rg}(A_z v_2 \mid \underline{b} - A_z Y_0) = 0 \Leftrightarrow A_z v_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \quad \underline{b} - A_z Y_0$$

$$r \cap s = \{P_0\} \Leftrightarrow \text{rg}(A_z v_2 \mid \underline{b} - A_z Y_0) = 1. \quad \text{In questo caso}$$

$$P_0 = Y_0 + t_0 v_2 \quad \text{dove } t_0 \text{ è l'unica}$$

$$\text{soluzione di } t A_z v_2 = \underline{b} - A_z Y_0.$$

Es: Stabilize la posizione reciproca
delle due rette

$$r: \begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ x + 2y + z = 6 \end{cases} \quad s = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Sol.:

$$A_z = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_z Y_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow b - A_z Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad A_z v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(A_z v_2 \mid b - A_z Y_0) = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \Rightarrow \text{rg}(A_z v_2) = 1 = \text{rg}(b - A_z Y_0)$$

$\Rightarrow rns = P_0$. Per Trovare il punto P_0 :

$$b - A_z Y_0 = 2 A_z v_2 \Rightarrow b = A_z (Y_0 + 2 v_2)$$

$$\Rightarrow P_0 = Y_0 + 2 v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

□

-) Due rette

$$r: \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases} \quad e \quad s: \begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma z=\delta \\ \alpha'x+\beta'y+\gamma'z=\delta' \end{cases}$$

si intersecano se e solo se il sistema

$$(*) \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ \alpha x+\beta y+\gamma z=\delta \\ \alpha'x+\beta'y+\gamma'z=\delta' \end{cases}$$

è risolubile se e solo se

$$\operatorname{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{array} \right) = \operatorname{rg} \left(\begin{array}{ccc} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{array} \right) = z$$

In questo caso

$$r \equiv s \iff z=2$$

$r \cap s = P_0 \iff z=3$ e P_0 è l'unica soluzione del sistema (*).

Es: Studiare la posizione reciproca
delle due rette

$$r: \begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ x-2y+3z=2 \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x+y+7z=1 \\ x+5y-4z=-1 \end{cases}$$

Sol.:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 5 & -4 & -1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 5 & -4 & -1 \end{array} \right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -4 & -1 \\ 0 & -7 & 7 & 3 \\ 0 & -4 & 11 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -3/7 \\ 0 & -4 & 11 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -3/7 \\ 0 & 0 & 7 & 2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -3/7 \\ 0 & 0 & 1 & 2/49 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & -41/49 \\ 0 & 1 & 0 & -19/49 \\ 0 & 0 & 1 & 2/49 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 54/49 \\ 0 & 1 & 0 & -19/49 \\ 0 & 0 & 1 & 2/49 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow P_0 = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 54 \\ -19 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{e } ns = \{P_0\}.$$

Rette sghembe

Due rette di $\mathbb{R}^3$ si dicono sghembe se non giacciono su uno stesso piano.

Poiché se due rette sono parallele o si intersecano giacciono su uno stesso piano, possiamo riformulare la definizione dicendo che due rette sono sghembe se non sono parallele e non si intersecano.

Per verificare che due rette siano sghembe dobbiamo verificare che né le condizioni di parallelismo né le condizioni di incidenza siano soddisfatte.

Otteniamo:

•) Due rette

$$r = X_0 + \langle v_1 \rangle \quad e \quad s = Y_0 + \langle v_2 \rangle$$

sono sghembe se e solo se $\det(v_1, v_2, X_0 - Y_0) \neq 0$

•) Due rette

$$r: \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases} \quad e \quad s = Y_0 + \langle v_2 \rangle$$

sono sghembe se e solo se posto $A_r = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$

$$\text{rg}(A_r v_2 \mid b - A_r Y_0) = 2.$$

(Infatti se questa condizione è soddisfatta

allora $r \cap s = \emptyset$ e $v_2 \notin \text{Ker } A_r$. Viceversa se

$v_2 \notin \text{Ker } A_r$ e $r \cap s = \emptyset$ allora vale questa condizione).

•) Due rette

$$z: \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases} \quad e \quad s: \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \\ \alpha'x + \beta'y + \gamma'z = \delta' \end{cases}$$

sono sghembe se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{pmatrix} \neq 0$$

Es: Studiare la posizione reciproca delle rette

$$r: \begin{cases} 2x+3y-2z=3 \\ x-2y+z=1 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x+2y+3z=7 \\ 2x-y-z=5 \end{cases}$$

Sol.:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 0 & 7 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -\det \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -1 & -8 & -11 \\ 4 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= -\det \begin{pmatrix} -1 & -8 & -11 \\ 0 & -30 & -38 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -30 & -38 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} -27 & -30 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = -3 \det \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= -3 \det \begin{pmatrix} 0 & -14 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = 14 \cdot 3 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = -9 \cdot 14$$

$$= -126 \neq 0 \Rightarrow r \text{ ed } s \text{ sono sghembe.}$$

Es: Studiare la posizione reciproca delle rette

$$r: \begin{cases} 2x+3y-2z=1 \\ x-2y+2z=2 \end{cases} \quad S: \begin{cases} x+5y-4z=-1 \\ 2x-3y+7z=-3 \end{cases}$$

Sol.:

$$\begin{aligned} \text{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & -4 & -1 \\ 2 & -3 & 7 & -3 \end{array} \right) &= \text{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 7 & -6 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & -6 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \end{array} \right) = \text{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 7 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &= \text{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & -27 & 46 \end{array} \right) = 3 \Rightarrow \text{rns} = \{P_0\}. \text{ Cerchiamo} \end{aligned}$$

P_0 :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & -27 & 46 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{46}{27} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 146/27 \\ 0 & 1 & 0 & -51/27 \\ 0 & 0 & 1 & -46/27 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 44/27 \\ 0 & 1 & 0 & -17/9 \\ 0 & 0 & 1 & -46/27 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Quindi

$$P_0 = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 44 \\ -51 \\ -46 \end{pmatrix}$$

retta-piano:

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Posizione reciproca retta/piano

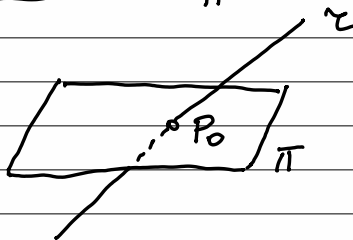
Denotiamo con r una retta e con π un piano di $\mathbb{R}^3$. Studiamo le condizioni che definiscono la loro posizione reciproca, a seconda della loro forma (parametrica o cartesiana).

Dalla geometria ci aspettiamo tre casi

$$r \subset \pi$$



$$r \cap \pi = \{P_0\}$$



$$r \parallel \pi$$



$$\cdot) \quad \Sigma = X_0 + \langle v_1 \rangle \quad \Pi = Y_0 + \langle v_2, v_3 \rangle$$

Σ è parallela a Π se e solo se $v_1 \in \langle v_2, v_3 \rangle$.

Σ e Π si intersecano se e solo se $X_0 - Y_0 \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

Il lettore potrà quindi riempire

facilmente la seguente Tabella:

	$\text{zg}(v_1 v_2 v_3)$	$\text{zg}(v_1 v_2 v_3 X_0 - Y_0)$
$\Sigma \subset \Pi$		
$\Sigma // \Pi$		
$\Sigma \cap \Pi = P_0$		

Per Trovare $P_0 \in \Sigma \cap \Pi$: sia $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$ l'unica soluzione di $(v_1 | v_2 | v_3)X = X_0 - Y_0$. Allora

$$t_1 v_1 + t_2 v_2 + t_3 v_3 = X_0 - Y_0$$

e quindi

$$P_0 = X_0 - t_1 v_1 = Y_0 + t_2 v_2 + t_3 v_3.$$

$$\underline{Es}: z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \pi = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Per studiare la loro posizione reciproca calcoliamo il rango

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Quindi il vettore direttore di z non appartiene al sottospazio di generatore di π .

Ne segue che z e π non sono paralleli.

Quindi si intersecano in un punto P_0 .

Per trovare P_0 risolviamo il sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 2 & 2 & 1 & | & 2 \\ 3 & 1 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & | & 2 \\ 0 & -2 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2/3 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2/3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2/3 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cdot) \quad \Sigma: \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}, \quad \Pi = Y_0 + \langle w_1, w_2 \rangle$$

Denotiamo $A_\Sigma := \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ e $\underline{b} = \begin{pmatrix} d \\ d' \end{pmatrix}$.

Σ è parallela a Π se e solo se $\text{Ker } A_\Pi \subseteq \langle w_1, w_2 \rangle$

La matrice 2×2 $A_\Sigma(w_1, w_2)$ non può

essere zero perché altrimenti $w_1, w_2 \in \text{Ker } A_\Sigma$

ma $\dim \text{Ker } A_\Sigma = 1$ e $\{w_1, w_2\}$ è lin. Ind. .

Σ e Π si intersecano $\Leftrightarrow \exists s, t \in \mathbb{R}$ t.c. $Y_0 + sw_1 + tw_2 \in \Sigma$

Quindi :

	$\det A_\Sigma(w_1, w_2)$	$\text{rg}(A_\Sigma(w_1, w_2) \mid \underline{b} - A_\Sigma Y_0)$
$\Sigma \subset \Pi$		
$\Sigma \parallel \Pi$		
$\Sigma \cap \Pi = P_0$		

Per Trovare P_0 : Sia $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$ l'unica soluzione del sistema $A_\Sigma(w_1, w_2) \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \underline{b} - A_\Sigma Y_0$. Allora

$$P_0 = Y_0 + t_1 w_1 + t_2 w_2.$$

$$\underline{Es}: \tau: \begin{cases} x+2y-3z=2 \\ 2x+3y+z=1 \end{cases} \quad \pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Poniamo $A_\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $\underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$$

Essa ha determinante diverso da zero.

Ne segue che τ e π si intersecano in un unico punto P_0 . Per trovare P_0

risolviamo il sistema che ha termine noto:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

e matrice dei coefficienti $\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{-44} \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{-44} \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \end{pmatrix} = -\frac{1}{22} \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{10}{22} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

•) $z = X_0 + \langle v \rangle$, $\pi: ax+by+cz=d$.

Denotiamo $A_\pi = (a, b, c)$.

z è parallela a π se e solo se $v \in \text{Ker } A_\pi$

z e π si intersecano se e solo se $\exists t \in \mathbb{R}$ t.c.

$X_0 + tv$ è soluzione dell'equazione $A_\pi X = d$.

Il lettore potrà riempire facilmente

la seguente tabella:

	$A_\pi v$	$\text{rg}(A_\pi v \mid d - A_\pi X_0)$
$z \subset \pi$		
$z \parallel \pi$		
$z \cap \pi = P_0$		

Per trovare P_0 : Sia t_0 l'unica soluzione di $(A_\pi v)t = d - A_\pi X_0$, allora

$$P_0 = X_0 + t_0 v.$$

$$\underline{E_s}: z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \pi: 2x + 3y - z = 2$$

$$\underline{\text{Sol.}}: A_\pi = (2, 3, -1), \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$A_\pi v = (2, 3, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 9 \neq 0.$$

Quindi π e π non sono parallele e quindi si intersecano in un punto P_0 .

Per Trovare P_0 : cerchiamo $t \in \mathbb{R}$ t.c.

$$9t = 2 - (2, 3, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 - 4 = -2$$

$$\Rightarrow t = -2/9.$$

Allora

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/9 \\ 5/9 \\ 11/9 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\cdot) \quad \begin{cases} \tau: \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases} & \pi: \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta. \end{cases}$$

Poniamo $A_\tau = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} d \\ d' \end{pmatrix}$, $A_\pi = (\alpha, \beta, \gamma)$.

τ e π sono paralleli se e solo se

$$\text{Ker } A_\tau \subset \text{Ker } A_\pi.$$

Questa condizione è equivalente a

$$\text{rg} \left(\frac{A_\tau}{A_\pi} \right) = 2$$

$$\text{ovvero } \det \left(\frac{A_\tau}{A_\pi} \right) = 0.$$

Il lettore potrà facilmente riempire la Tabella:

	$\det \left(\frac{A_\tau}{A_\pi} \right)$	$\text{rg} \left(\frac{A_\tau}{A_\pi} \mid \frac{\underline{b}}{\delta} \right)$
$\tau \subset \pi$		
$\tau \parallel \pi$		
$\tau \cap \pi = P_0$		

P_0 è l'unica soluzione del sistema

$$\left(\frac{A_\tau}{A_\pi} \right) X = \left(\frac{\underline{b}}{\delta} \right)$$

$$\underline{Es}: \quad \tau: \begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ x-2y+z=2 \end{cases} \quad \pi: x+2y+3z=5$$

Studiamo il sistema

$$\begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ x-2y+z=2 \\ x+2y+3z=5 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & -3 & -3 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 9 \\ 0 & 7 & -3 & -3 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & -52 & -66 \end{array} \right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 33/26 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 19/26 \\ 0 & 1 & 0 & 3/26 \\ 0 & 0 & 1 & 33/26 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 25/26 \\ 0 & 1 & 0 & 3/26 \\ 0 & 0 & 1 & 33/26 \end{array} \right)$$

Quindi $\tau \cap \pi = P_0$ e

$$P_0 = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 25 \\ 3 \\ 33 \end{pmatrix}$$

Posizione reciproca piano/piano

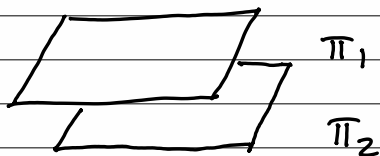
Siano π_1 e π_2 due piani di $\mathbb{R}^3$.

La nostra intuizione geometrica ci dice che ci sono 3 possibilità per la loro posizione reciproca

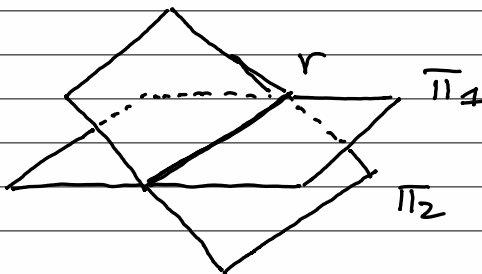
$$\pi_1 \equiv \pi_2$$



$$\pi_1 \parallel \pi_2$$



$$\pi_1 \cap \pi_2 = r : \text{retta}$$



Studiamo le condizioni di posizione reciproca
diverse forme

$$\bullet) \pi_1 = X_0 + \langle v_1, v_2 \rangle, \quad \pi_2 = Y_0 + \langle w_1, w_2 \rangle$$

π_1 e π_2 sono parallele se e solo se

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle.$$

π_1 e π_2 si intersecano se e solo se

$$X_0 - Y_0 \in \langle v_1, v_2, w_1, w_2 \rangle.$$

Per cui il lettore potrà facilmente riempire la Tabella

	$\text{rg}(v_1 v_2 w_1 w_2)$	$\text{rg}(v_1 v_2 w_1 w_2 X_0 - Y_0)$
$\pi_1 \equiv \pi_2$		
$\pi_1 \parallel \pi_2$		
$\pi_1 \cap \pi_2 = z$		

Per Trovare $z = Z_0 + \langle v \rangle : \langle v \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle \cap \langle w_1, w_2 \rangle$

$$Z_0 = X_0 - t_1 v_1 - t_2 v_2 = Y_0 + s_1 w_1 + s_2 w_2 \quad \text{dove}$$

$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$ è una soluzione del sistema

$$(v_1, v_2, w_1, w_2) X = X_0 - Y_0$$

$$\underline{Es}: \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\text{rg} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & -1 \end{array} \right) = \text{rg} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$$= \text{rg} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) = \text{rg} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$$= \text{rg} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 11 & -3 \end{array} \right) = \text{rg} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{6} & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$= \text{rg} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1/6 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/6 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{6} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) = \text{rg} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{6} & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

Da qui deduciamo che $\pi_1 \cap \pi_2 = \tau = \tau_0 + \langle v \rangle$.

Un vettore direttore per τ si trova studiando

$$\text{Ker} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) = \text{Ker} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 11/6 \end{array} \right) = \left\langle \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -11 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle$$

ovvero

$$-4v_1 - 3v_2 - 11w_1 + 6w_2 = 0. \text{ Quindi}$$

$$v = -11w_1 + 6w_2 = 4v_1 + 3v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 17 \\ 7 \end{pmatrix} \in \langle v_1, v_2 \rangle \cap \langle w_1, w_2 \rangle.$$

$$z_0 = x_0 + \frac{1}{2}v_2 = y_0 - \frac{1}{2}w_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \tau = \left\langle \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 17 \\ 11 \end{pmatrix} \right\rangle. \quad \square$$

•) $\pi_1 = X_0 + \langle v_1, v_2 \rangle$, $\pi_2: ax+by+cz=d$

Poniamo $A_{\pi_2} = (a, b, c)$. Allora i piani

π_1 e π_2 sono paralleli se e solo se $\langle v_1, v_2 \rangle = \text{Ker } A_{\pi_2}$

Essi si intersecano se e solo se $\exists t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

t.c. $A_{\pi_2}(X_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2) = d$.

Sarà facile per il lettore riempire la Tabella:

	$\text{rg } A_{\pi_2}(v_1 v_2)$	$\text{rg}(A_{\pi_2}(v_1 v_2) d - A_{\pi_2} X_0)$
$\pi_1 \equiv \pi_2$		
$\pi_1 \parallel \pi_2$		
$\pi_1 \cap \pi_2 = r$		

Per trovare $z = Z_0 + \langle v \rangle$: $\langle v \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle \cap \text{Ker } A_{\pi_2}$.

Osserviamo che se $\text{Ker } A_{\pi_2}(v_1|v_2) = \left\langle \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle$, allora

$$v = h v_1 + k v_2 \dots$$

Sia $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$ una soluzione di $A_{\pi_2}(v_1|v_2) X = d - A_{\pi_2} X_0$.

Allora $Z_0 = X_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2$.

$$\underline{E_S}: \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \pi_2: 2x + 3y - z = 2.$$

Poniamo $A = (2, 3, -1)$.

$$(2, 3, -1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (7, -3) \neq (0, 0).$$

e chiaramente $\text{Ker}(7, -3) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle$

Quindi $\pi_1 \cap \pi_2 = \mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \langle v \rangle$.

Un vettore direttore di $\mathcal{L}$ è $v = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 17 \end{pmatrix}$

Cerchiamo $\mathcal{Z}_0$:

$$(2, 3, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \Rightarrow 2 - 4 = -2.$$

Risolviamo il sistema di matrice completa $(7, -3 | -2)$

Le soluzioni sono $\begin{pmatrix} -2/7 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle$. Scegliamone

una, ad esempio $\begin{pmatrix} -2/7 \\ 0 \end{pmatrix}$, e otteniamo

$$\mathcal{Z}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/7 \\ 3/7 \\ 5/7 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Per cui

$$\mathcal{L} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 17 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

•) $\pi_1: ax+by+cz=d$, $\pi_2: \alpha x+\beta y+\gamma z=\delta$

Studiare la posizione reciproca dei piani π_1 e π_2 si traduce nello studiare il sistema

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ \alpha x+\beta y+\gamma z=\delta \end{cases}$$

Poniamo $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$ $\underline{b} = \begin{pmatrix} d \\ \delta \end{pmatrix}$.

Il lettore non avrà difficoltà a riempire la Tabella

	$\text{rg } A$	$\text{rg } (A \underline{b})$
$\pi_1 \equiv \pi_2$		
$\pi_1 \parallel \pi_2$		
$\pi_1 \cap \pi_2 = \ell$		

Es: $\pi_1: 2x+3y-z=2$, $\pi_2: x-2y+3z=1$

Il rango della matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

è 2 poiché il minore $\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -7 \neq 0$.

Per cui $\pi_1 \cap \pi_2 = \mathcal{L}$ ed

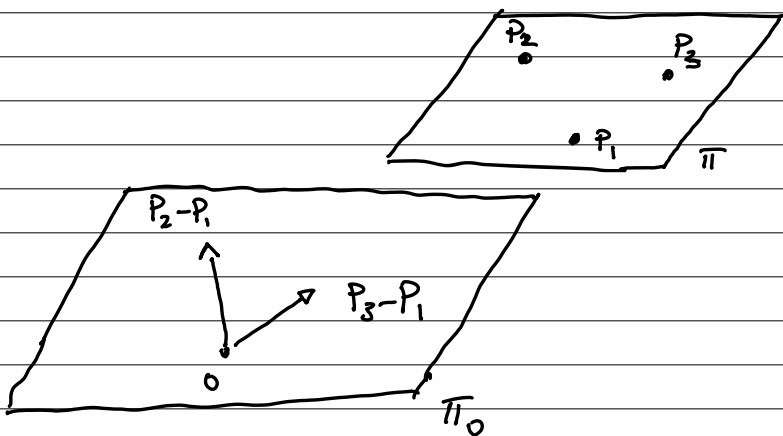
$$\mathcal{L}: \begin{cases} 2x+3y-z=2 \\ x-2y+3z=1 \end{cases}.$$

Piano passante per 3 punti

Siano $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^3$ Tre punti
distinti di $\mathbb{R}^3$. Allora il piano

$$\pi = P_1 + \langle P_2 - P_1, P_3 - P_1 \rangle$$

è l'unico piano che li contiene



Es: Il piano per $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è

$$\pi = P_1 + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle e_1, e_2 \rangle.$$

Stella di piani per un punto

Sia $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Come sono fatti i piani che contengono P_0 ?

Essi sono della forma

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

per $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

L'insieme di questi piani si chiama

Stella di piani per P_0 .

Es: Determinare l'eq. cartesiana del piano passante per $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sol.: Consideriamo la stella di piani per P_1 :

$$a(x - 1) + b(y - 1) + c(z - 1) = 0$$

ed imponiamo il passaggio per P_2 e P_3 :

$$\begin{cases} a(1 - 1) + b(2 - 1) + c(1 - 1) = 0 \\ a(2 - 1) + b(2 - 1) + c(1 - 1) = 0 \end{cases}$$

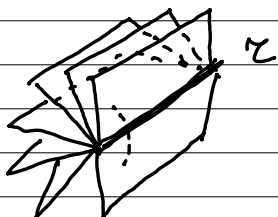
ovvero $\begin{cases} b = 0 \\ a + b = 0 \end{cases}$. Il piano cercato è $\pi: z = 1$.

Fascio di piani per una retta

Sia r una retta in forme cartesiane

$$r: \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$$

Come sono fatti i piani che la contengono?



Essi sono della forma

$$\alpha(ax+by+cz-d) + \beta(a'x+b'y+c'z-d') = 0$$

$(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

L'insieme di questi piani si chiama
il fascio di piani per la retta r .

Es: Il fascio di piani per $r: \begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ x+y+z=2 \end{cases}$

$$\text{è } (2\alpha+\beta)x + (3\alpha+\beta)y + (\beta-\alpha)z = \alpha+2\beta$$

dove $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$

Esercizio 22 pag. 168.

Consideriamo le rette

$$r = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad r' = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

1) Dimostrare che r ed r' sono sghembe.

2) Trovare il piano π contenente r e parallelo a r' .

Sol.:

$$1) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} = 9 \neq 0$$

$\Rightarrow r_1$ ed r_2 sono sghembe.

2) Cerchiamo eq. contestione per r_1

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y-x \\ 0 & z \end{pmatrix} \Rightarrow r_1: \begin{cases} y-x = -4 \\ z = 2 \end{cases}$$

Consideriamo il fascio di piani per r_1 :

$$\alpha(y-x+4) + \beta(z-2) = 0$$

$$\text{ovvero} \quad -\alpha x + \alpha y + \beta z = -4\alpha + 2\beta.$$

Questo piano è parallelo a r' $\Leftrightarrow -\alpha - 2\alpha + \beta = 0$

$$\Leftrightarrow \beta = 3\alpha. \quad \text{Quindi}$$

$$\pi: -x + y + 3z = 2$$

Struttura metrica standard di $\mathbb{R}^3$

Def: Il prodotto scalare standard

(o prodotto puntino) di $\mathbb{R}^3$ è la funzione

$$\cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(X, Y) \mapsto X \cdot Y := X^t Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

Adesso procediamo come nel caso di $\mathbb{R}^2$:

.) Il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$ è bilineare, simmetrico e definito positivo

.) Definiamo la norma di $X \in \mathbb{R}^3$ come

$$\|X\| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Valgono le stesse proprietà della norma in $(\mathbb{R}^3, \cdot)$:

$$\|\lambda X\| = |\lambda| \|X\|; \quad \|X+Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2 + 2X \cdot Y$$

$$\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\|; \quad |X \cdot Y| \leq \|X\| \|Y\|.$$

.) Definiamo la distanza di X e Y come

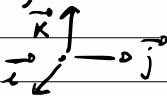
$$\text{dist}(X, Y) = \|X - Y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

.) Definiamo l'angolo $\hat{XY}$ tra X e Y come

$$\cos(\hat{XY}) = \frac{X \cdot Y}{\|X\| \|Y\|}$$

•) Rappresentazione grafica di $(\mathbb{R}^3, \cdot)$:

$$(\mathcal{V}_0^3, \cdot) \equiv (\mathbb{R}^3, \cdot).$$

Rif. cartesiano:  (come la mano destra)

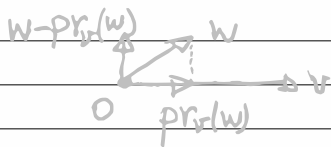
•) Un vettore di $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ è un vettore di norma 1

•) $\forall X \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \Rightarrow \frac{X}{\|X\|}$ è un vettore.

•) Due vettori X e Y sono ortogonali se $X \cdot Y = 0$.

•) Dati $v, w \in \mathbb{R}^3$ con $v \neq 0$, la proiezione ortogonale di w su v è

$$\text{pr}_v(w) := \frac{w \cdot v}{v \cdot v} v \in \langle v \rangle$$



Esso è caratterizzato da $(w - \text{pr}_v(w)) \cdot v = 0$ ed è il multiplo di v più vicino a w .

•) Se $U_0 \subset \mathbb{R}^3$ è un sottospazio vettoriale allora il suo ortogonale è definito come

$$U_0^\perp = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid X \cdot u \quad \forall u \in U_0\}$$

e vale il teorema di decomposizione

ortogonale: $\mathbb{R}^3 = U_0 \oplus U_0^\perp$

OSS (importante):

Se $\tau: \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$ è una retta

allora $\tau^\perp$ è il piano generato da

$$\tau^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Se $\pi: ax+by+cz=d$ è un piano

allora $\pi^\perp$ è la retta generata da

$$\pi^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Il vettore $n = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ si chiama il

vettore normale al piano $\pi: ax+by+cz=d$.

.) Un insieme $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0 \in \mathbb{R}^3\}$ è
ortogonale se $x_i \cdot x_j = 0 \quad \forall i \neq j$.

.) Gli insiemi ortogonali sono lin. Ind.

.) Una base ortonormale di $(\mathbb{R}^3, \cdot)$

è una base $B = \{E_1, E_2, E_3\}$ di $\mathbb{R}^3$

tale che 1) $E_i \cdot E_i = 1 \quad \forall i=1,2,3$ e

2) $E_i \cdot E_j = 0 \quad \forall i \neq j$.

Coefficienti di Fourier.

Sia $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base ortogonale di $(\mathbb{R}^3, \cdot)$. Allora, $\forall w \in \mathbb{R}^3$ si ha

$$w = \frac{w \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \frac{w \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 + \frac{w \cdot v_3}{v_3 \cdot v_3} v_3$$

I coefficienti $\left\{ \frac{w \cdot v_i}{v_i \cdot v_i} \mid i=1,2,3 \right\}$ si chiamano i coefficienti di Fourier di w nella base ortogonale B .

Se B è ortonormale, si ha

$$w = (w \cdot v_1) v_1 + (w \cdot v_2) v_2 + (w \cdot v_3) v_3.$$

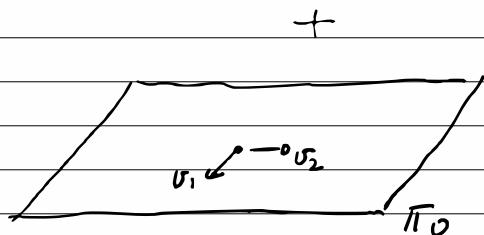
Es: Sia $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ allora

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} &= \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e i coefficienti di Fourier sono 2, 1, -1.

ORIENTAZIONE (informalmente)

Dato un piano π_0 passante per O , esso divide lo spazio in due semispazi



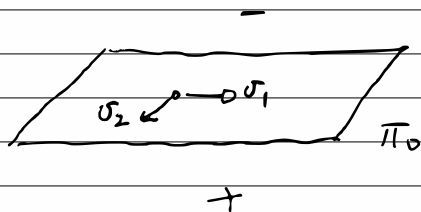
Notiamo che per $X \in \mathbb{R}^3$ ci sono due possibilità: $\det(v_1, v_2, X) \geq 0$ oppure $\det(v_1, v_2, X) \leq 0$.

Definiamo

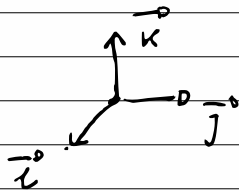
$$\pi_B^+ = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \det(v_1, v_2, X) \geq 0\}$$

$$\pi_B^- = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \det(v_1, v_2, X) \leq 0\}$$

Questa definizione dipende dalla base ordinata $B = \{v_1, v_2\}$. Se scambiamo l'ordine l'orientamento cambia

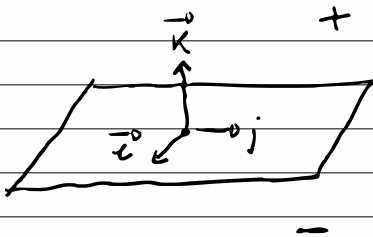


Il riferimento cartesiano standard è messo "come la mano destra"



e $\{\vec{i}^0, \vec{j}^0\}$ corrisponde a $B = \{e_1, e_2\}$

Per cui $\pi_0 = \langle e_1, e_2 \rangle$ allora π_0^+ è il semispazio che contiene $\vec{k}^0$ mentre π_0^- è l'altro semispazio



OSS : $\forall X, Y \in \pi_0^+ \Rightarrow X + Y \in \pi_0^+$. Infatti:

$$\det(v_1, v_2 | X + Y) = \det(v_1, v_2 | X) + \det(v_1, v_2 | Y).$$

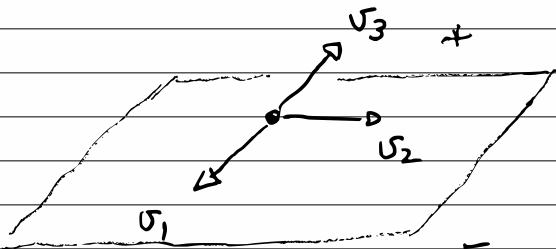
$\cdot) \forall \alpha \geq 0 \quad \forall X \in \pi_0^+ \Rightarrow \alpha X \in \pi_0^+$. Infatti:

$$\det(v_1, v_2 | \alpha X) = \alpha \det(v_1, v_2 | X).$$

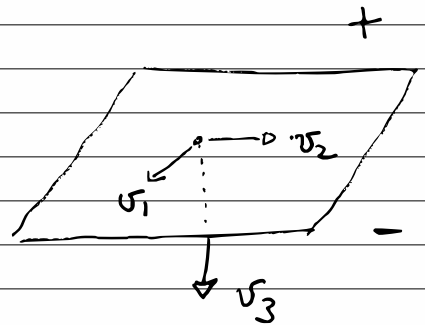
Def: Una base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$
 si dice equivarsa (al riferimento
 standard) se
 $\det(v_1 | v_2 | v_3) > 0$

Essa si dice contraversa (al riferimento
 standard) se
 $\det(v_1 | v_2 | v_3) < 0$

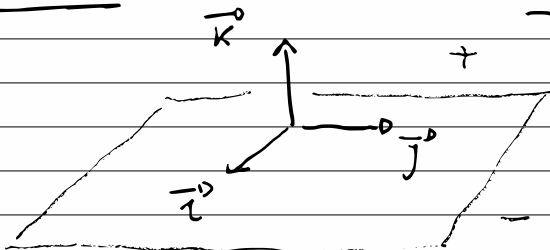
Si ha:



Equivarsa



contraversa



Prodotto misto

Prop.: Siano $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Allora

$$u \cdot (v \wedge w) = \det(u|v|w)$$

dim:

$$\det(u|v|w) = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} =$$

sviluppo lungo

la 1^a colonna

$$= u_1 \det \begin{pmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} - u_2 \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} + u_3 \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$$

$$= u \cdot (v \wedge w).$$

□

Il numero $u \cdot (v \wedge w)$ si chiama
il prodotto misto di u, v e w .

Il prodotto vettoriale

Due vettori lin. Ind. $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$ generano un piano

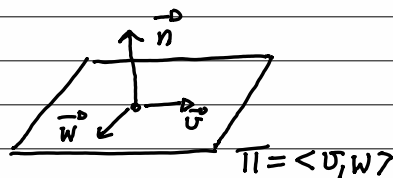
$$\pi = \langle v, w \rangle: ax + by + cz = 0$$

Vogliamo determinare a, b, c :

un vettore $n = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ normale a π

è soluzione del sistema

$$\begin{cases} av_1 + bv_2 + cv_3 = 0 \\ aw_1 + bw_2 + cw_3 = 0 \end{cases}$$



osserviamo che

$$\det(v, v, w) = 0 \quad \text{e} \quad \det(w, v, w) = 0$$

ovvero

$$\det \begin{pmatrix} v_1 & v_1 & w_1 \\ v_2 & v_2 & w_2 \\ v_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = v_1 \det \begin{pmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} - v_2 \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} + v_3 \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} w_1 & v_1 & w_1 \\ w_2 & v_2 & w_2 \\ w_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = w_1 \det \begin{pmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} - w_2 \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} + w_3 \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a = \det \begin{pmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix}, \quad b = -\det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix}, \quad c = \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$$

• è soluzione del sistema.

Def : Il prodotto vettoriale di v e w è il vettore

$$v \wedge w = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \det \begin{pmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Oss :

$$\begin{aligned} v \wedge w &= \det(v|w|e_1)e_1 + \det(v|w|e_2)e_2 + \det(v|w|e_3)e_3 \\ &= \sum_{i=1}^3 \det(v|w|e_i)e_i \end{aligned}$$

Es :

$$e_1 \wedge e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_3, \quad e_2 \wedge e_1 = -e_3$$

$$e_2 \wedge e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1, \quad e_3 \wedge e_2 = -e_1$$

$$e_3 \wedge e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_2, \quad e_1 \wedge e_3 = -e_2$$

Quindi $\wedge$ è una funzione

$$\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(v, w) \longmapsto v \wedge w$$

e quindi un'operazione su $\mathbb{R}^3$.

Prime proprietà:

1) $v \wedge w = -w \wedge v$ (è antisimmetrica)

$$\begin{aligned} \text{Infatti: } v \wedge w &= \sum_{i=1}^3 \det(v|w|e_i) e_i = \\ &= \sum_{i=1}^3 -\det(w|v|e_i) e_i = -w \wedge v \end{aligned}$$

In particolare: Per ogni $v \in \mathbb{R}^3$

$$v \wedge v = -v \wedge v \implies v \wedge v = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

2) È bilineare:

$$(\alpha v_1 + \beta v_2) \wedge w = \alpha v_1 \wedge w + \beta v_2 \wedge w$$

$$v \wedge (\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha v \wedge w_1 + \beta v \wedge w_2.$$

$$\begin{aligned} \text{Infatti: } (\alpha v_1 + \beta v_2) \wedge w &= \sum_{i=1}^3 \det(\alpha v_1 + \beta v_2 | w | e_i) e_i \\ &= \sum_{i=1}^3 \alpha \det(v_1 | w | e_i) e_i + \beta \det(v_2 | w | e_i) e_i \end{aligned}$$

$$v \wedge (\alpha w_1 + \beta w_2) = -(\alpha w_1 + \beta w_2) \wedge v = -\alpha w_1 \wedge v - \beta w_2 \wedge v$$

$$= \alpha v \wedge w_1 + \beta v \wedge w_2.$$

Teorema degli
orlati

$$\cdot) \quad v \wedge w = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \text{rg}(v, w) \leq 1$$

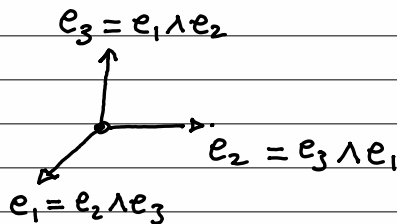
$$\iff \{v, w\} \text{ è lin. DIP.}$$

$$\cdot) \quad v \cdot (v \wedge w) = 0, \quad w \cdot (v \wedge w) = 0$$

($v \wedge w$ è ortogonale a v e w).

$$\cdot) \quad e_1 \wedge e_2 = e_3, \quad e_2 \wedge e_3 = e_1, \quad e_3 \wedge e_1 = e_2$$

(attenzione all'ordine!)



Non è un'operazione associativa.

$$(e_1 \wedge e_2) \wedge (e_2 + e_3) = e_3 \wedge (e_2 + e_3) = e_3 \wedge e_2 = -e_1$$

$$e_1 \wedge (e_2 \wedge (e_2 + e_3)) = e_1 \wedge (e_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Es:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = (e_1 + 2e_2 + e_3) \wedge (2e_1 + e_2 + 3e_3)$$

$$\begin{aligned} &= \overset{e_3}{2} \cancel{e_1} \wedge e_1 + e_1 \wedge \overset{-e_2}{2} e_2 + 3 e_1 \wedge e_3 + \\ &\quad + 4 \overset{-e_3}{e_2} \wedge e_1 + 2 \cancel{e_2} \wedge e_2 + 6 \overset{e_1}{e_2} \wedge e_3 + \\ &\quad + 2 \overset{e_2}{e_3} \wedge e_1 + \overset{-e_1}{e_3} \wedge e_2 + 3 \cancel{e_3} \wedge e_3 = \end{aligned}$$

$$= 5e_1 - e_2 - 3e_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Norma del prodotto vettoriale e sua interpretazione geometrica

Siano $v, w \in \mathbb{R}^3$. Allora

$$v \wedge w = \sum_{i=1}^3 \det(v|w|e_i) e_i$$

Dato che $\{e_1, e_2, e_3\}$ è una base ortonormale, per il Teorema di Pitagora si ha

$$\|v \wedge w\|^2 = \sum_{i=1}^3 \det(v|w|e_i)^2$$

Prop.: $\|v \wedge w\|^2 = \det(v|w|v \wedge w)$

dim:

$$\begin{aligned} \det(v|w|v \wedge w) &= \det(v|w|\sum_{i=1}^3 \det(v|w|e_i) e_i) \\ &= \sum_{i=1}^3 \det(v|w|e_i)^2 = \|v \wedge w\|^2 \end{aligned}$$

□

Es: $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$v \wedge w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(v|w|v \wedge w) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

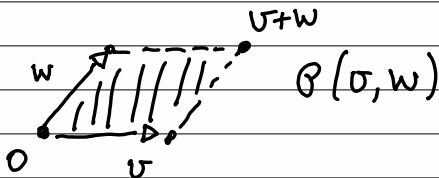
$$= -3 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = -3(-6) = 18$$

$$\|v \wedge w\|^2 = 9 \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = 18$$



Diamo un'interpretazione geometrica a questo numero:

Sia $P(v, w)$ il parallelogramma generato da v e w :



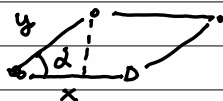
ovvero $P(v, w) = \text{Conv}(0, v, w, v+w).$

Teorema :

$$\|v \wedge w\| = \|v\| \|w\| \sin \hat{v\hat{w}} = \text{Area } \mathcal{P}(v, w).$$

dim :

$$\begin{aligned}\|v \wedge w\|^2 &= (v_1 w_2 - v_2 w_1)^2 + (v_1 w_3 - v_3 w_1)^2 + (v_2 w_3 - v_3 w_2)^2 \\&= v_1^2 w_2^2 + v_2^2 w_1^2 - 2v_1 v_2 w_1 w_2 + v_1^2 w_3^2 + v_3^2 w_1^2 - 2v_1 v_3 w_1 w_3 \\&\quad + v_2^2 w_3^2 + v_3^2 w_2^2 - 2v_2 v_3 w_2 w_3 = \\&= w_1^2 (v_2^2 + v_3^2) + w_2^2 (v_1^2 + v_3^2) + w_3^2 (v_1^2 + v_2^2) + \\&\quad - 2(v_1 w_1)(v_2 w_2) - 2(v_1 w_1)(v_3 w_3) - 2(v_2 w_2)(v_3 w_3) \\&= w_1^2 \|v\|^2 - v_1^2 w_1^2 + w_2^2 \|v\|^2 - v_2^2 w_2^2 + w_3^2 \|v\|^2 - v_3^2 w_3^2 + \\&\quad - 2(v_1 w_1)(v_2 w_2) - 2(v_1 w_1)(v_3 w_3) - 2(v_2 w_2)(v_3 w_3) \\&= \|v\|^2 \|w\|^2 - (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3)^2 = \|v\|^2 \|w\|^2 - (v \cdot w)^2 \\&= \|v\|^2 \|w\|^2 - \left(\frac{v \cdot w}{\|v\| \|w\|} \right)^2 \|v\|^2 \|w\|^2 = \|v\|^2 \|w\|^2 (1 - \cos^2 \hat{v\hat{w}}) \\&= \|v\|^2 \|w\|^2 \sin^2 \hat{v\hat{w}} \\&\Rightarrow \|v \wedge w\| = \|v\| \|w\| |\sin \hat{v\hat{w}}| = \text{Area } \mathcal{P}(v, w).\end{aligned}$$



$$\text{Area } \mathcal{P} = xy \sin \alpha$$

Es: Siano $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Calcolare l'area di $P(v, w)$.

Sol.:

$$v \wedge w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

L'area cercata è

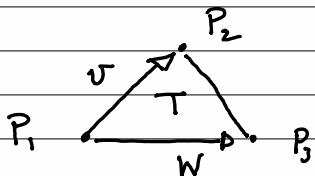
$$\|v \wedge w\| = \sqrt{1 + 16 + 9} = \sqrt{26}.$$

Es: Calcolare l'area del Triangolo
di vertici

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

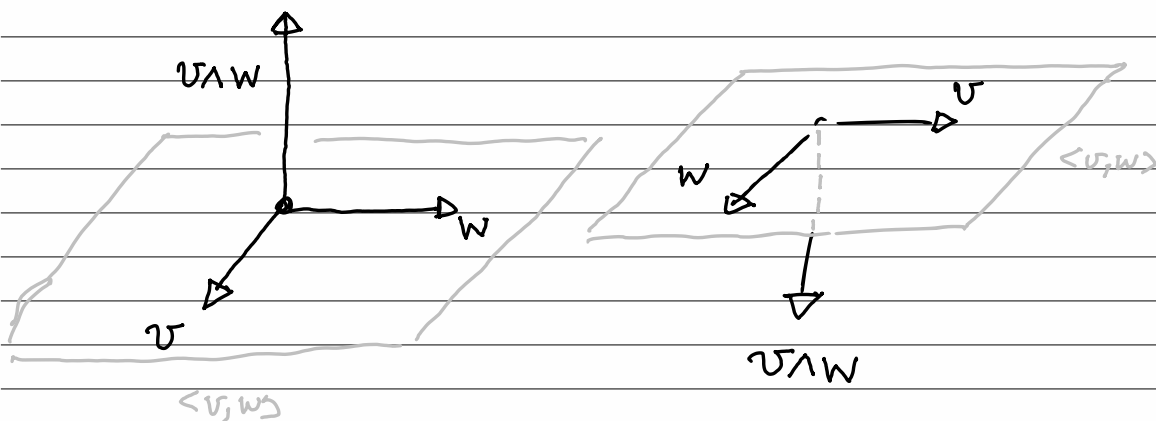
Sol.:

$$v = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, w = P_3 - P_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\text{Area}(T) = \frac{1}{2} \text{Area } P(v, w) = \frac{1}{2} \|v \wedge w\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \right\| = \frac{3}{2} \sqrt{5}$$

In conclusione, dati $v, w \in \mathbb{R}^3$
il loro prodotto vettoriale $\bar{e}$
un vettore che si denota $v \wedge w$
(si legge "v rettoz w"), che $\bar{e}$
nullo se e solo se v e w sono
lin. DIP. Se v e w sono lin. Ind.
allora $v \wedge w$ ha direzione
ortogonale al piano $\langle v, w \rangle$,
norma uguale all'area di $P(v, w)$
e verso che si determina
con la regola della mano destra



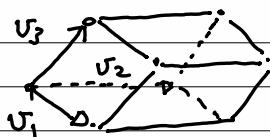
Il determinante 3×3 come volume (orientato)

Siano $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$. Denotiamo con

$$\mathcal{P}(v_1, v_2, v_3)$$

il parallelepipedo che ha v_1, v_2 e v_3 come

spigoli:



$$\mathcal{P}(v_1, v_2, v_3)$$

Denotiamo con $\text{Vol } \mathcal{P}(v_1, v_2, v_3)$ il volume di $\mathcal{P}(v_1, v_2, v_3)$.

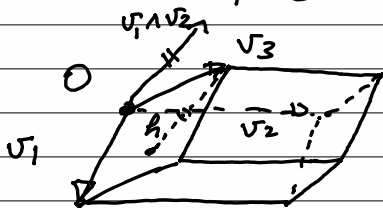
Teorema:

$$\text{Vol } \mathcal{P}(v_1, v_2, v_3) = |\det(v_1, v_2, v_3)|$$

dim:

$$\text{Vol } \mathcal{P}(v_1, v_2, v_3) = \text{Area } \mathcal{P}(v_1, v_2) \cdot \text{Altezza}$$

L'altezza è $\| \text{pr}_{v_1 \wedge v_2}(v_3) \|$:



Per cui:

$$\begin{aligned} \text{Vol } \mathcal{P}(v_1, v_2, v_3) &= \|v_1 \wedge v_2\| \frac{|v_3 \cdot v_1 \wedge v_2|}{\|v_1 \wedge v_2\|} = |v_3 \cdot v_1 \wedge v_2| \\ &= |\det(v_1, v_2, v_3)|. \quad \square \end{aligned}$$

Es: Calcolare il volume del
parallelepipedo di spigoli:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Sol.: Il volume cercato è

$$\begin{aligned} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right| &= \left| \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| -3 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right| = |-3| = 3. \end{aligned}$$

▣

Es: Determinare $k \in \mathbb{R}$ t.c. il volume
del parallelepipedo di spigoli

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 2 \end{pmatrix}$$

sia uguale a 1.

Sol.:

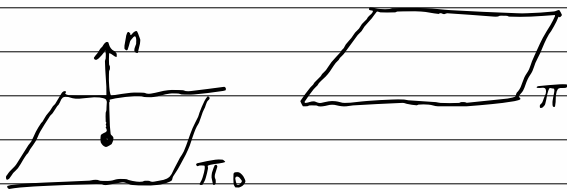
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = k-1$$

$$|k-1| = 1 \Leftrightarrow k-1 = \pm 1 \Leftrightarrow k \in \{2, 0\}.$$

▣

Vettori normali ad un piano

Sia $\pi \subset \mathbb{R}^2$ un piano. Vediamo come si trovano dei vettori normali a π , ovvero un vettore n ortogonale a π .



.) Se $\pi: ax+by+cz=d$ allora

$n = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ è un vettore normale.

I vettori normali sono

$$n_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

.) Se $\pi = X_0 + \langle v_1, v_2 \rangle$ allora

$$n = v_1 \wedge v_2$$

è un vettore normale a π . I vettori

normali sono

$$\pm \frac{v_1 \wedge v_2}{\|v_1 \wedge v_2\|}$$

Vettori direttori di una retta

Sia $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ una retta in forma
cartesiana:

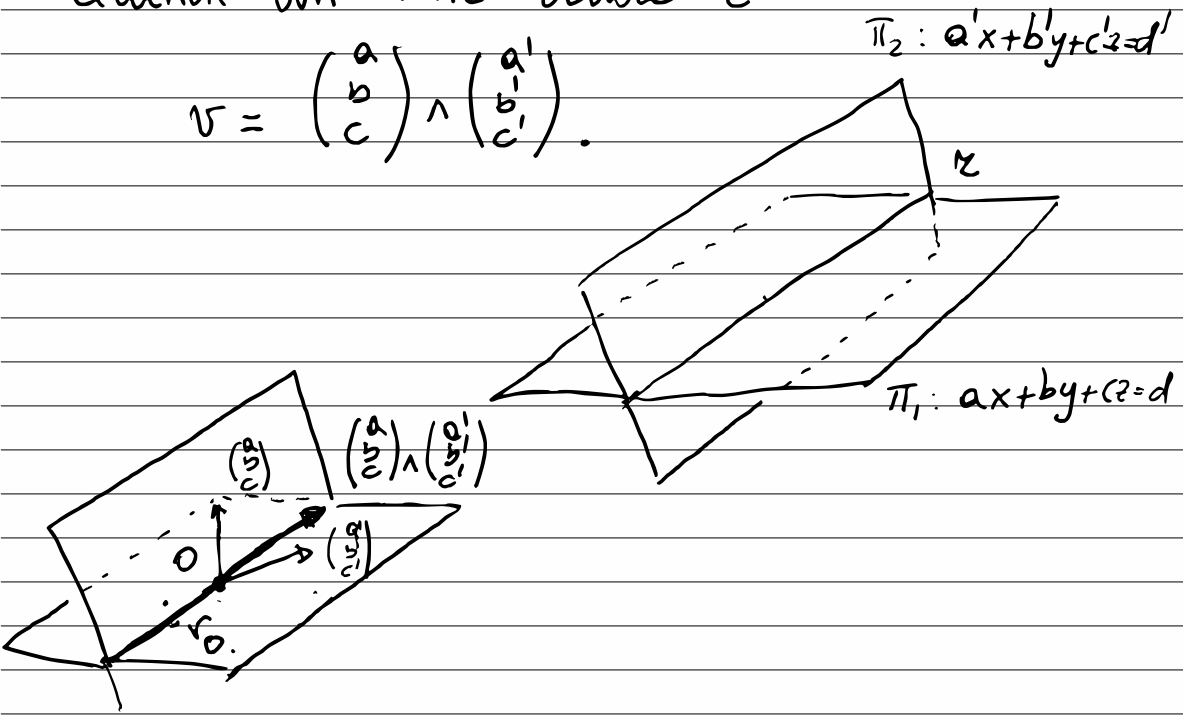
$$\gamma: \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$$

Un vettore direttore di γ è una soluzione
non-nulla del sistema omogeneo associato,
ovvero è un vettore $v \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ t.c.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot v = 0 = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \cdot v$$

Quindi un tale vettore è

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}.$$



Distanza punto-piano

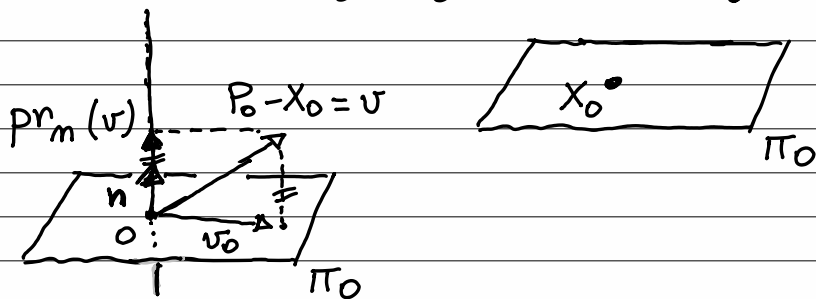
Sia $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ e sia π un piano di $\mathbb{R}^3$.

Vogliamo calcolare la distanza tra P_0 e π .

Poniamo $\pi = X_0 + \pi_0$.

Sia n un vettore normale a π_0 .

Poniamo $v := P_0 - X_0$.



Allora $(v - \text{pr}_m(v)) \cdot n = v \cdot n - \frac{v \cdot n}{n \cdot n} n \cdot n = 0$

e quindi il vettore

$$v_0 := v - \text{pr}_m(v) \in \pi_0 = \langle n \rangle^\perp.$$

Per definizione,

$$v - v_0 = \text{pr}_m(v) \in \langle n \rangle = \pi_0^\perp.$$

Dimostriamo che v_0 è il vettore di π_0 più vicino a v :

$\forall w \in \pi_0$: $\pi_0^\perp$ π_0 Pitagora

$$\begin{aligned}\|v-w\|^2 &= \|\underbrace{v-v_0}_{\pi_0^\perp} + \underbrace{v_0-w}_{\pi_0}\|^2 \stackrel{\text{Pitagora}}{=} \\ &= \|v-v_0\|^2 + \|v_0-w\|^2 \geq \|v-v_0\|^2\end{aligned}$$

Quindi,

$$\text{dist}(v, v_0) \leq \text{dist}(v, w) \quad \forall w \in \pi_0$$

L'uguaglianza vale se e solo se

$$\|v_0-w\|=0 \Leftrightarrow v_0=w.$$

Quindi v_0 è il punto di π_0 più vicino a v .

Quindi:

$$\text{dist}(P_0, \pi) = \text{dist}(P_0 - X_0, \pi_0)$$

$$= \text{dist}(v, \pi_0)$$

$$= \text{dist}(v, v_0)$$

$$= \|v - v_0\|$$

$$= \|\text{pr}_m(P_0 - X_0)\|$$

$$= \frac{|(P_0 - X_0) \cdot m|}{\|m\|} \quad (*)$$

Se $\pi: ax+by+cz=d$ allora

$m = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ e quindi (*) diventa

$$\text{dist}(P_0, \pi) = \frac{|(P_0 - X_0) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} =$$

$$X_0 \cdot m = d$$

$$= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Se $\pi = X_0 + \langle v_1, v_2 \rangle$ allora

$m = v_1 \wedge v_2$ e quindi (*) diventa

$$\text{dist}(P_0, \pi) = \frac{|(P_0 - X_0) \cdot v_1 \wedge v_2|}{\|v_1 \wedge v_2\|} =$$

$$= \frac{|\det(v_1 | v_2 | P_0 - X_0)|}{\|v_1 \wedge v_2\|}$$

$$\underline{Es}: P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \pi: 2x + 3y - z = 2$$

$$\text{dist}(P_0, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 3|}{\sqrt{4 + 9 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{14}}$$

$$\underline{Es}: P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{aligned} \text{dist}(P_0, \pi) &= \frac{\left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \right|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|}} = \\ &= \frac{\left| \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \right|}{\left\| \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\|}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{7}{\sqrt{35}}$$

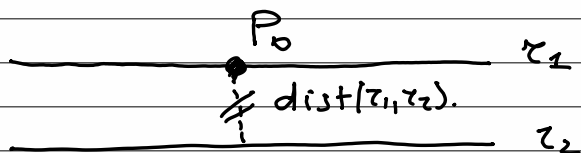
Distanza retta - retta

Siano r_1 ed r_2 due rette di $\mathbb{R}^3$.

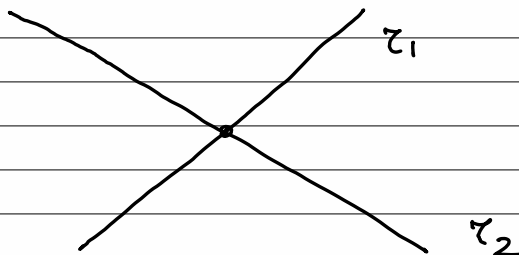
Desideriamo calcolare la loro distanza.

Cominciamo con i casi più semplici:

- 1) Se r_1 ed r_2 sono parallele
allora possiamo scegliere
un punto qualunque $P_0 \in r_1$ e
 $\text{dist}(r_1, r_2) = \text{dist}(P_0, r_2)$



- 2) Se r_1 ed r_2 si intersecano
allora $\text{dist}(r_1, r_2) = 0$



Supponiamo quindi che le due rette siano sghembe: quindi

$$r = X_0 + r_0, \quad s = Y_0 + s_0$$

e $Z_0 + S_0$ è un piano che denotiamo con π_0

Calcoliamo:

$$\text{dist}(r_1, r_2) = \min_{X \in r_0, Y \in s_0} \text{dist}(X_0 + X, Y_0 + Y)$$

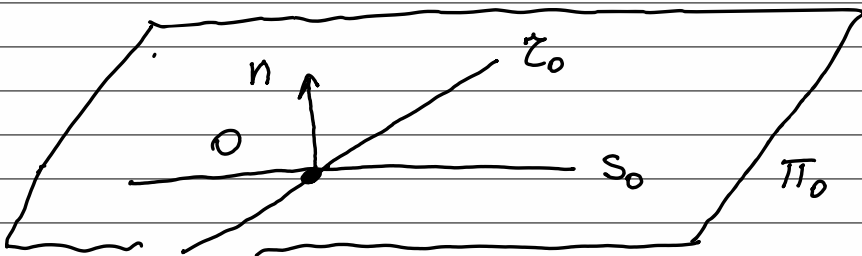
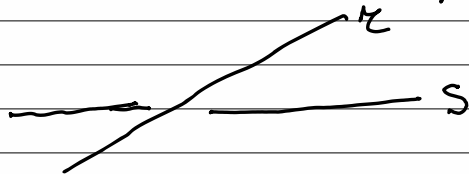
$$= \min_{X \in r_0, Y \in s_0} \text{dist}(X_0 - Y_0, -X + Y)$$

$$= \text{dist}(X_0 - Y_0, \pi_0)$$

distanza
punto-piano $\rightarrow$

$$= \frac{|(X_1 - X_2) \cdot n|}{\|n\|}$$

dove n è la normale al piano π_0 :



•) Se $r = X_0 + \langle v_1 \rangle$ e $s = Y_0 + \langle v_2 \rangle$ allora
 $m = v_1 \wedge v_2$, e usando il teorema
 sul prodotto misto, (*) diventa

$$\text{dist}(r, s) = \frac{|\det(v_1, v_2, X_0 - Y_0)|}{\|v_1 \wedge v_2\|}$$

•) Se $r = X_0 + \langle v_1 \rangle$ e $s: \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$
 allora, poiché un vettore direttore di s è
 $v_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$, si ha

$$m = v_1 \wedge \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \right).$$

•) Se $r: \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$ e $s: \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \\ \alpha'x + \beta'y + \gamma'z = \delta' \end{cases}$

allora

$$m = \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \right) \wedge \left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} \right).$$

NB: $\wedge$ non è associativa, quindi
 non si possono spostare le parentesi.

Es: Calcolare la distanza tra

$$r = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right) + \left\langle \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \right\rangle \quad \text{e} \quad s = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right) + \left\langle \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 3 \end{array} \right) \right\rangle$$

Sol:

$$\text{dist}(r, s) = \frac{\left| \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \right|}{\left\| \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \wedge \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 3 \end{array} \right) \right\|} = \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Es: Calcolare la distanza tra

$$r = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right) + \left\langle \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \right\rangle \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x - 2y = -1 \\ 3x - 2z = 1 \end{cases}$$

Sol: Un vettore direttore per s è

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \rightarrow \text{prendiamo } v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Es: Calcolare la distanza Tra

$$r_1 : \begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x-y+2z=1 \end{cases} \quad \text{ed} \quad r_2 : \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ 2x+y-z=2 \end{cases}$$

Sol.:

$$r_1 = P_1 + \langle v_1 \rangle \quad \text{dove} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{e } P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r_2 = P_2 + \langle v_2 \rangle \quad \text{dove} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{e } P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_1 - P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(v_1, v_2, P_1 - P_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -4 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix} = -(5+12) = -17 \neq 0$$

$\Rightarrow r_1$ ed r_2 sono sghembe.

$$v_1 \wedge v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 \\ -17 \\ 13 \end{pmatrix}$$

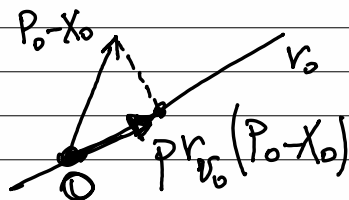
$$\text{dist}(r_1, r_2) = \frac{|(P_1 - P_2) \cdot v_1 \wedge v_2|}{\|v_1 \wedge v_2\|} = \frac{17}{\sqrt{841+289+169}} = \frac{17}{\sqrt{1299}}$$

Distanza punto-retta

Sia $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ e $\mathcal{L} = X_0 + \mathcal{L}_0$ una retta di $\mathbb{R}^3$.

Allora

$$\text{dist}(P_0, \mathcal{L}) = \text{dist}(P_0 - X_0, \mathcal{L}_0)$$



Se $\mathcal{L}_0 = \langle v_0 \rangle$ allora

$$\text{dist}(P, \mathcal{L}) = \| P_0 - X_0 - \text{pr}_{\mathcal{L}_0}(P_0 - X_0) \|$$

$$= \| P_0 - X_0 - \frac{(P_0 - X_0) \cdot v_0}{v_0 \cdot v_0} v_0 \|$$

Es: $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$

Allora

$$\text{dist}(P_0, \mathcal{L}) = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 2/9 \\ -8/9 \\ 2/9 \end{pmatrix} \right\| =$$

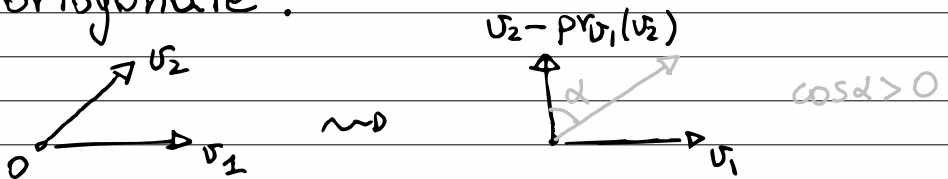
$$= \frac{2}{9} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{2\sqrt{18}}{9}$$

Procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt

In $(\mathbb{R}^2, \cdot)$, se $B = \{v_1, v_2\}$ è una base allora l'insieme

$$B' = \{w_1 = v_1, w_2 = v_2 - \text{pr}_{v_1}(v_2)\}$$

è ortogonale.



Dividendo per le norme otteniamo

$$E = \left\{ E_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}, E_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} \right\}$$

una base ortonormale di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$.

Questo procedimento di "riduzione" o di ortogonalizzazione si può fare anche in $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ ma servono più passaggi:

Teorema (Procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt)

Sia $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$.

Allora esiste una base $B = \{E_1, E_2, E_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ con le seguenti proprietà:

- 1) E è una base ortonormale di $(\mathbb{R}^3, \cdot)$
- 2) $\langle E_1 \rangle = \langle v_1 \rangle$, $\langle E_1, E_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$
- 3) $v_1 \cdot E_1 > 0$, $v_2 \cdot E_2 > 0$, $v_3 \cdot E_3 > 0$.

Essa si trova come segue: poniamo

$$F_1 := v_1$$

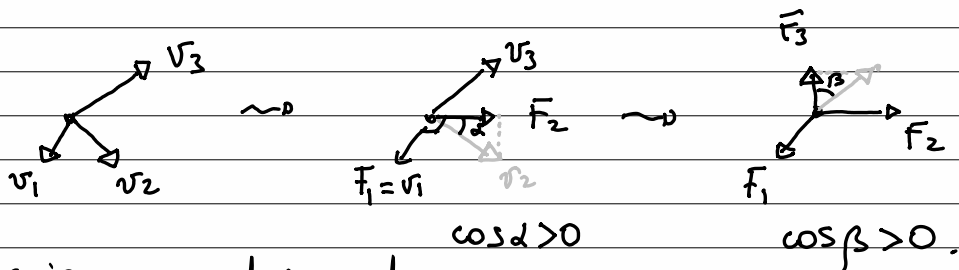
$$F_2 := v_2 - \text{pr}_{F_1}(v_2) = v_2 - \frac{v_2 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1$$

$$\begin{aligned} F_3 &:= v_3 - \text{pr}_{F_1}(v_3) - \text{pr}_{F_2}(v_3) = \\ &= v_3 - \frac{v_3 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 - \frac{v_3 \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 \end{aligned}$$

e definiamo

$$E_1 := \frac{F_1}{\|F_1\|}, \quad E_2 := \frac{F_2}{\|F_2\|}, \quad E_3 := \frac{F_3}{\|F_3\|}.$$

dim: La dimostrazione può essere
illustrata come segue



Facciamo vedere che

$\{F_1, F_2, F_3\}$ è ortogonale e tale che

$$2) \langle F_1 \rangle = \langle v_1 \rangle ; \quad \langle F_1, F_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$$

$$3) \quad v_2 \cdot F_2 = \|v_2\| \|F_2\| \cos \alpha > 0$$

$$v_3 \cdot F_3 = \|v_3\| \|F_3\| \cos \beta > 0$$

Dimostriamolo algebricamente:

$$F_1 \cdot F_2 = F_1 \cdot (v_2 - \text{pr}_{F_1}(v_2)) = F_1 \cdot v_2 - v_2 \cdot F_1 = 0$$

$$F_1 \cdot F_3 = F_1 \cdot (v_3 - \text{pr}_{F_1}(v_3) - \text{pr}_{F_2}(v_3)) = F_1 \cdot v_3 - v_3 \cdot F_1 - 0 = 0$$

$$F_2 \cdot F_3 = F_2 \cdot (v_3 - \text{pr}_{F_1}(v_3) - \text{pr}_{F_2}(v_3)) = F_2 \cdot v_3 - 0 - v_3 \cdot F_2 = 0$$

$\Rightarrow \{F_1, F_2, F_3\}$ è ortogonale.

$$2) \langle F_1 \rangle = \langle v_1 \rangle$$

$$\langle F_1, F_2 \rangle = \langle v_1, v_2 - \text{pr}_{F_1}(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$$

$$3) v_1 \cdot F_1 = v_1 \cdot v_1 > 0$$

$$v_2 \cdot F_2 = v_2 \cdot (v_2 - \text{pr}_{F_1}(v_2)) = v_2 \cdot v_2 - \frac{v_2 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} v_2 \cdot F_1$$

$$= \|v_2\|^2 - \frac{(v_2 \cdot F_1)^2}{\|F_1\|^2}$$

Cauchy-Schwarz

$$|v_2 \cdot F_1| \leq \|v_2\| \|F_1\| \geq \|v_2\|^2 - \frac{\|v_2\|^2 \|F_1\|^2}{\|F_1\|^2} = 0$$

$$v_3 \cdot F_3 = v_3 \cdot \left(v_3 - \frac{v_3 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 - \frac{v_3 \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 \right) =$$

$$= v_3 \cdot v_3 - \frac{(v_3 \cdot F_1)^2}{\|F_1\|^2} - \frac{(v_3 \cdot F_2)^2}{\|F_2\|^2}$$

osserviamo che

$$\|v_3\|^2 = \left\| \frac{v_3 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 + \frac{v_3 \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 + \frac{v_3 \cdot F_3}{F_3 \cdot F_3} F_3 \right\|^2$$

$$= \frac{(v_3 \cdot F_1)^2}{\|F_1\|^4} + \frac{(v_3 \cdot F_2)^2}{\|F_2\|^2} + \frac{(v_3 \cdot F_3)^2}{\|F_3\|^2}$$

$$\Rightarrow v_3 \cdot F_3 = \|v_3\|^2 - \frac{(v_3 \cdot F_1)^2}{\|F_1\|^2} - \frac{(v_3 \cdot F_2)^2}{\|F_2\|^2} = \frac{(v_3 \cdot F_3)^2}{\|F_3\|^2} > 0$$

OSS: $v_3 \cdot F_3$ non può essere zero!

Altrimenti $v_3 \in \langle F_3 \rangle^\perp = \langle F_1, F_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$
contro l'ipotesi che $\{v_1, v_2, v_3\}$ fosse
lin. Ind.

Def: Data una base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$
la base $\{F_1, F_2, F_3\}$ definita
nel teorema si chiama la base
ottenuta da B mediante
procedimento di ortogonalizzazione
di Gram-Schmidt. La base
ortonormale $\{E_1, E_2, E_3\}$ si dice
ottenuta da B mediante
procedimento di ortonormalizzazione
di Gram-Schmidt.

Brevemente: procedimento GM e
GMN.

Es: Trovare la base ottenuta da

$$B = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

mediante procedimento GM:

Sol.:

$$F_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

$$F_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 - \frac{v_3 \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)} \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \cdot v_1 = 3 > 0$$

$$F_2 \cdot v_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} (-1 + 4 - 1) = \frac{2}{3} > 0$$

$$F_3 \cdot v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 + 1 = 2 > 0$$