Isometrie di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$

Una *isometria* di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ è una funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$\operatorname{dist}(f(X), f(Y)) = \operatorname{dist}(X, Y) \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^2.$$

ovvero

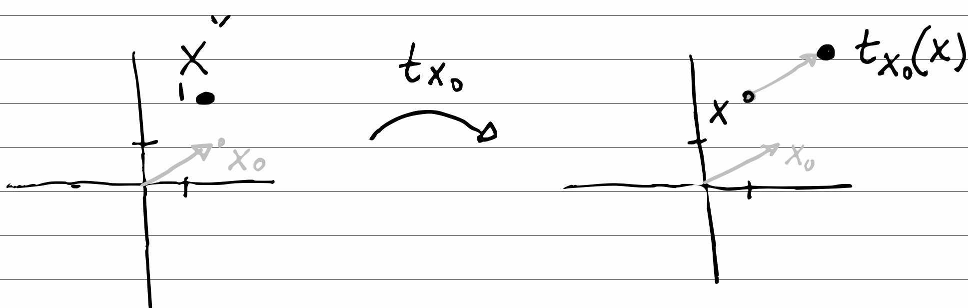
$$\|f(X) - f(Y)\| = \|X - Y\| \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^2.$$

Es: Sia $X_0 \in \mathbb{R}^2$. La *traslazione per X_0* è la funzione

$$t_{X_0} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$X \mapsto X + X_0.$$

Essa è un'isometria:

$$\|t_{X_0}(X) - t_{X_0}(Y)\| = \|X - X_0 - Y + X_0\| = \|X - Y\|$$



NB: Se $X_0 \neq 0$, t_{X_0} non è lineare!

Prop.: Sia f un'isometria t.c. $f(0)=0$. Allora

1) f preserva il prodotto scalare, ovvero
$$f(X)\cdot f(Y) = X\cdot Y \quad \forall X, Y$$

2) f è lineare

dim: 1) $\forall X$ si ha

$$\|f(X)\| = \|f(X)-0\| \overset{f(0)=0}{=} \|f(X)-f(0)\| \overset{f \text{ è un'isometria}}{=} \|X-0\| = \|X\|$$

In particolare: poiché f è un'isometria

$\|f(X)-f(Y)\|^2 = \|X-Y\|^2$. Sviluppando i due membri:

$$\|f(X)-f(Y)\|^2 = \|f(X)\|^2 + \|f(Y)\|^2 - 2f(X)\cdot f(Y)$$
$$= \|X\|^2 + \|Y\|^2 - 2f(X)\cdot f(Y)$$

$$\|X-Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2 - 2X\cdot Y$$

otteniamo $X\cdot Y = f(X)\cdot f(Y)$.

2) a) $\|f(X+Y)-f(X)-f(Y)\|^2 = \|f(X+Y)\|^2 + \|f(X)+f(Y)\|^2 +$
$-2f(X+Y)\cdot(f(X)+f(Y)) = \|X+Y\|^2 + \|X\|^2 + \|Y\|^2 + 2f(X)\cdot f(Y) +$
$-2f(X+Y)\cdot f(X) - 2f(X+Y)\cdot f(Y) = 2\|X\|^2 + 2\|Y\|^2 + 4X\cdot Y +$
$-2(X+Y)\cdot X - 2(X+Y)\cdot Y = 0$

$\Rightarrow f(X+Y) = f(X) + f(Y)$.

b) Sia $\lambda \in \mathbb{R}$, $X \in \mathbb{R}^2$:

$$\|\lambda f(X) - f(\lambda X)\|^2 = \|\lambda f(X)\|^2 + \|f(\lambda X)\|^2 - 2\lambda f(X) \cdot f(\lambda X)$$

$$= \lambda^2 \|f(X)\|^2 + \|\lambda X\|^2 - 2\lambda\, X \cdot (\lambda X)$$

$$= \lambda^2 \|X\|^2 + \lambda^2 \|X\|^2 - 2\lambda^2 X \cdot X = 0$$

$$\Rightarrow \lambda f(X) = f(\lambda X).$$ ☒

Quindi, un' isometria che fissa l'origine è necessariamente lineare.

Osserviamo (Esercizio) che

1) La composizione di isometrie è un'isometria.

2) Ogni isometria è la composizione di una traslazione con un'isometria lineare.

[Se f è un' isometria, poniamo $\mathcal{L}(X) = f(X) - f(0)$.
Allora $\mathcal{L}$ è un'isometria lineare e

$$f(X) = t_{f(0)}(\mathcal{L}(X)) \Rightarrow \boxed{f = t_{f(0)} \circ \mathcal{L}}$$]

3) Le isometrie sono invertibili

[Sia f un isometria. Se $f(X)=f(Y)$ allora $0 = \|f(X)-f(Y)\| = \|X-Y\| \Rightarrow X=Y \Rightarrow f$ è iniettiva. Scriviamo $f = t_{f(0)} \circ \mathcal{L}$ con $\mathcal{L}$ lineare. Allora $\mathcal{L}$ è iniettiva e quindi un isomorfismo. Dato che le traslazioni sono invertibili $\left(t_{X_0}^{-1} = t_{-X_0}\right)$, f è invertibile in quanto composizione di funzioni invertibili].

4) Un'applicazione lineare $\mathcal{L}$ è un'isometria se e solo se $\|\mathcal{L}(X)\| = \|X\|$ $\forall X$.

Studiamo, quindi, le isometrie lineari di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$.

Sia $\mathcal{L}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un'isometria lineare. Allora $\mathcal{L} = S_A$ per una qualche matrice $A \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Poiché $\mathcal{L}$ è invertibile, A lo è.

Poiché $\mathcal{L}$ è un'isometria, $\forall X, Y \in \mathbb{R}^2$

$$\mathcal{L}(X) \cdot \mathcal{L}(Y) = X \cdot Y \qquad \forall X, Y \in \mathbb{R}^2$$

ovvero

$$AX \cdot AY = X \cdot Y \qquad \forall X, Y \in \mathbb{R}^2$$

ovvero

$$X^t A^t A Y = X \cdot Y \qquad \forall X, Y \in \mathbb{R}^2$$

ovvero

$$A^t A = \mathbb{1}_2 \qquad \forall X, Y \in \mathbb{R}^2$$

ovvero

$$A^{-1} = A^t$$

Quindi S_A è un'isometria di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ se e solo se $\boxed{A^tA = \mathbb{1}_2}$.

Vediamo cosa vuol dire:

$$A^tA = \mathbb{1}_2 \iff A_1^tA^1 = 1 \qquad A_2^{2}A^{1} = 0$$
$$A_2^tA^1 = 0 \qquad A_2^tA^2 = 1$$

$$\iff A^1 \cdot A^1 = 1,\ A^1 \cdot A^2 = 0,\ A^2 \cdot A^2 = 1$$

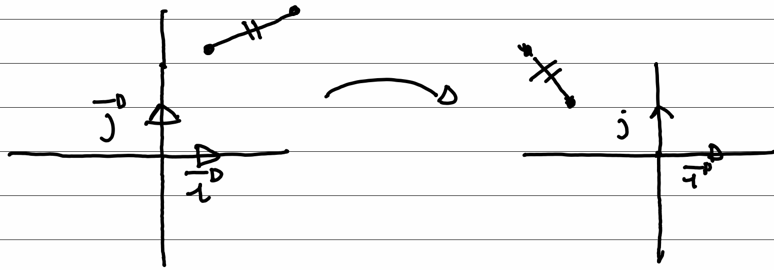
$\iff$ Le colonne $\{A^1, A^2\}$ di A formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$.

<u>Def</u>: Una matrice A si dice <u>ortogonale</u> se $A^tA = \mathbb{1}$.

<u>Es</u>:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ è ortogonale
- $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ è ortogonale
- $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ non è ortogonale
- $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1 \\ 1/\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$ non è ortogonale.

Isometrie lineari di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$

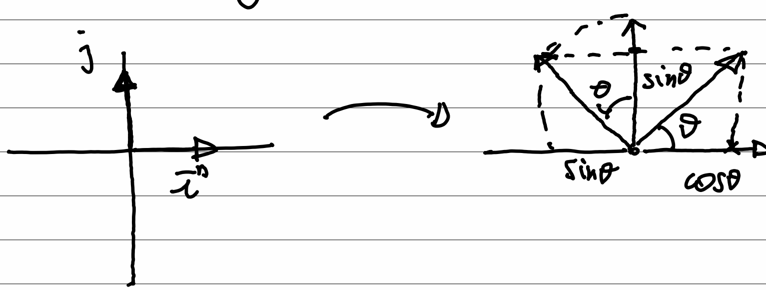


Rotazioni: Dato $\theta \in [0, 2\pi)$

la matrice

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

rappresenta la rotazione di un angolo θ in senso anti-orario



$$R_\theta(e_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \qquad R_\theta(e_2) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

R_θ è chiaramente un'isometria: comunque verifichiamolo algebricamente

$$R_\theta X \cdot R_\theta Y = X^t R_\theta^t R_\theta Y$$

$$R_\theta^t R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2$$

$\Rightarrow$ $R_\theta X \cdot R_\theta Y = X \cdot Y$.

$\Rightarrow$ R_θ è un' isometria.

<u>Riflessioni</u>: Consideriamo la retta $r: ax + by = 0$

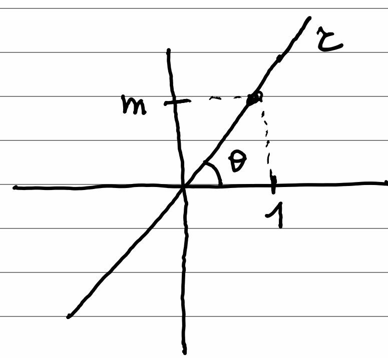
Se $b \neq 0$ essa è

$$\boxed{y = mx}$$

dove $m = -\frac{a}{b}$ è la <u>pendenza</u> di r

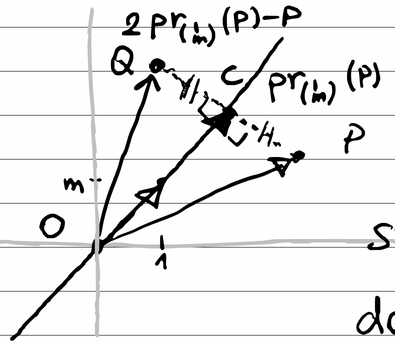
$r = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow$ $m = \operatorname{tg} \theta$



$r: \ y = mx \qquad r = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right\rangle$

La riflessione rispetto a r è la funzione $P \mapsto Q$ definita geometricamente



sia $\overrightarrow{OC} = pr_{\binom{1}{m}}(\overrightarrow{OP})$ allora Q è il punto diverso da P sulla retta per P e C distante da C quanto P.

Chiamiamo $\phi_m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : P \mapsto Q$. Allora la definizione algebrica sarà

$$\phi_m(P) = 2\, pr_{\binom{1}{m}}(P) - P$$

Essa è lineare:

$$\phi_m(\alpha P + \beta Q) = 2\, pr_{\binom{1}{m}}(\alpha P + \beta Q) - (\alpha P + \beta Q)$$

$$= \alpha\left(2\, pr_{\binom{1}{m}}(P) - P\right) + \beta\left(2\, pr_{\binom{1}{m}}(Q) - Q\right)$$

ed è un'isometria

$$\|\phi_m(P)\| = \|P\| \quad \forall P.$$

Cerchiamo la matrice che rappresenta ϕ_m nella base standard di $\mathbb{R}^2$:

$$\phi_m(e_1) = 2\, pr_{\binom{1}{m}}(e_1) - e_1 = 2\, \frac{\binom{1}{0}\cdot\binom{1}{m}}{1+m^2}\binom{1}{m} - \binom{1}{0} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{1+m^2} - 1 \\ \frac{2m}{1+m^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 \\ 2m \end{pmatrix}$$

$$\phi_m(e_2) = 2\, pr_{\binom{1}{m}}(e_2) - e_2 = 2\, \frac{\binom{0}{1}\cdot\binom{1}{m}}{1+m^2}\binom{1}{m} - \binom{0}{1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2m}{1+m^2} \\ \frac{2m^2}{1+m^2} - 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 2m \\ m^2-1 \end{pmatrix}$$

Poniamo

$$\boxed{Q_m = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}}$$

e si ha

$$\phi_m(X) = Q_m X.$$

La matrice

$$\boxed{Q_m = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}}$$

si chiama <u>matrice di riflessione</u> rispetto la retta $y = mx$.

La matrice di riflessione rispetto alla retta $x = 0$ (delle ordinate) è

$$Q_\infty = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le matrici di riflessione sono chiaramente isometrie:

$$Q_m^t Q_m = \mathbb{1}_2 \qquad \text{(Esercizio!)}$$

Quindi:

$$Q_m X \cdot Q_m Y = X^t Q_m^t Q_m Y = X \cdot Y.$$

<u>Teorema</u> : Sia $\mathcal{L}:(\mathbb{R}^2,\cdot)\to(\mathbb{R}^2,\cdot)$ un' isometria lineare, $\mathcal{L}=S_A$. Allora $\mathcal{L}$ è una rotazione se $\det A=1$ ed $\mathcal{L}$ è una riflessione se $\det A=-1$.

In particolare, le uniche isometrie lineari del piano sono rotazioni e riflessioni.

<u>dim</u>:

$$\mathcal{L}(X)\cdot\mathcal{L}(Y)=AX\cdot AY=X\cdot Y \quad \forall X,Y\in\mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow \boxed{A^tA=\mathbb{1}_2}$$

In particolare,

$$(\det A)^2=1$$

$\Rightarrow$ $\det(A)=1$ oppure $\det A=-1$.

1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\det A = ad - bc = 1$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$\Rightarrow a = d, \ b = -c$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

Inoltre

$\det A = 1 = a^2 + b^2$

$\Rightarrow \exists \theta$ t.c. $a = \cos\theta$ e $b = \sin\theta$

$\Rightarrow A = R_\theta$

2) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\det A = -1$

$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} = A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$\Rightarrow d = -a, \ b = c \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$

Inoltre, $\det A = -1 = -a^2 - b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$

$\Rightarrow \exists \theta : \ a = \cos\theta \ b = \sin\theta$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = A_\theta$

Se $\theta = \pi$ allora $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Q_\infty$.

Supponiamo quindi $\theta \in [0, 2\pi)$, $\theta \neq \pi$.

In particolare, $\cos(\theta/2) \neq 0$ e quindi $Tg(\theta/2) = \frac{\sin \theta/2}{\cos \theta/2}$ è definita. Poniamo

$$\boxed{m = tg\, \theta/2}$$

e dimostriamo che

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix} = Q_m$$

Si ha:

$$1 + m^2 = 1 + \frac{\sin^2\theta/2}{\cos^2\theta/2} = \frac{1}{\cos^2\theta/2}$$

$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}$

$$1 - m^2 = 1 - \frac{\sin^2\theta/2}{\cos^2\theta/2} = \frac{\cos^2\theta/2 - \sin^2\theta/2}{\cos^2\theta/2} = \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{1-m^2}{1+m^2}}$$

$$2m = 2\, tg\, \frac{\theta}{2} = 2\frac{\sin\theta/2}{\cos\theta/2} = \frac{2\sin\theta/2\cos\theta/2}{(\cos\theta/2)^2}$$

$$= \sin\theta / \cos^2\theta/2 \quad \Rightarrow \boxed{\sin\theta = 2m/1+m^2}$$

<u>NB</u>: Nella dimostrazione abbiamo dimostrato la seguente utile uguaglianza

$$Q_m = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

dove

$$m = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.$$

Matrici ortogonali

Una matrice $A \in Mat_{n \times n}$ si dice **ortogonale** se $A^t A = \mathbb{1}_n$

$\Leftrightarrow$ $A^{-1} = A^t$

$\Leftrightarrow$ $S_A : (\mathbb{R}^n, \cdot) \to (\mathbb{R}^n, \cdot)$ è una isometria.

$\Leftrightarrow$ le colonne di A formano una base ortonormale di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$.

Es: Le matrici ortogonali 2×2 sono

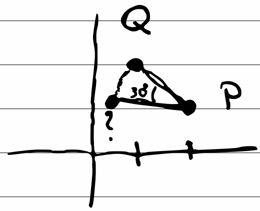
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad [\text{Rotazioni}]$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \quad [\text{Riflessioni}]$$

Es: Sia $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Trovare il punto ottenuto ruotando Q di $30°$ in senso anti-orario attorno al punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Sol.:



Il punto cercato è

$$P + R_{\frac{\pi}{6}}(Q-P) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{3}/2 \\ 2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 - \sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}$$

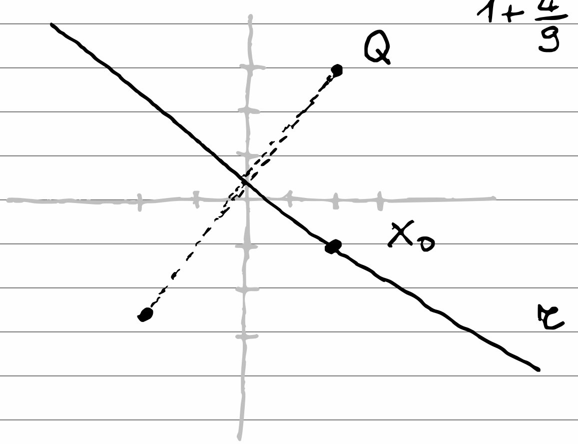
Es: Sia $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Trovare il punto ottenuto riflettendo ortogonalmente Q attraverso la retta

$$r: \ 2x+3y=1$$

Sol.: $r = X_0 + r_0$, dove $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $r_0 : y = -\frac{2}{3}x$.
per cui ha pendenza $m = -\frac{2}{3}$.
Riflettere Q attraverso r è uguale a riflettere $Q - X_0$ attraverso r_0 e poi traslare per X_0. Ricordando che $Q_m = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$, il punto cercato è

$$X_0 + Q_m(Q - X_0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1+\frac{4}{9}}\begin{pmatrix} 1-\frac{4}{9} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{9}-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -22 \\ -33 \end{pmatrix}$$



<u>Computer grafica</u>

Le traslazioni del piano non sono lineari. Per poterle implementare su un calcolatore si usa la seguente tecnica: si identifica $\mathbb{R}^2$ con il piano affine di $\mathbb{R}^3$ di equazione $z=1$

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \tilde{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

La traslazione per $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ diventa lineare:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x_0 \\ y+y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \widetilde{t_{X_0}(X)}$$

Questa tecnica si usa per creare videogiochi 2d.