Calcolo dell'inversa con Gauss

Una matrice $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$ si dice **invertibile** se $S_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ è invertibile

Ricordiamo che S_A è invertibile

se e solo se S_A è iniettiva e suriettiva

se e solo se $Ker\, S_A = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ e $Im\, S_A = \mathbb{K}^m$

se e solo se $Ker\, A = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ e $rg\, A = m$.

Ma $rg\, A = n - \dim Ker\, A = m$. Quindi se A è invertibile, $m = n$ ovvero A deve essere quadrata.

Quindi:

$A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$ è invertibile

$$\Updownarrow$$

$$m = n \quad e \quad \dim Ker\, A = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$m = n \quad e \quad rg\, A = n$$

Notiamo che la forma a scala ridotta di una matrice quadrata di rango massimo è l'identità. Quindi abbiamo anche la seguente caratterizzazione delle matrici invertibili:

$$A \text{ è invertibile } \Longleftrightarrow \mathrm{rref}(A) = \mathbb{1}_n.$$

Abbiamo visto che una funzione è invertibile se e solo se ammette inversa sinistra ed inversa destra ed in questo caso le due inverse coincidono e sono uniche.

Quindi,

$A \in \mathrm{Mat}_{m\times m}(\mathbb{K})$ è invertibile

$$\Updownarrow$$

$S_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ è invertibile

$$\Updownarrow$$

$\exists\, g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ t.c. $g \circ S_A = S_A \circ g = Id_{\mathbb{K}^n}$.

Abbiamo dimostrato che l'inversa di una funzione lineare è lineare.
Per cui $g = S_B$ per qualche $B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$.
Quindi:

$A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ è invertibile

$$\Updownarrow$$

$\exists\, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ t.c. $S_A \circ S_B = S_B \circ S_A = S_{\mathbb{1}_n}$

$$\Updownarrow$$

$\exists\, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ t.c. $AB = BA = \mathbb{1}_n$.

<u>OSS</u> (importante).

Data $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$.

$\exists B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ t.c. $AB = BA = \mathbb{1}_n$

$$\Updownarrow$$

$\exists B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ t.c. $AB = \mathbb{1}_n$

Infatti: $\Downarrow$) ovvio.

$\Uparrow$)

$AB = \mathbb{1}_n \Rightarrow S_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ è suriettiva

$\Rightarrow \operatorname{rg} A = n$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} A = n - \operatorname{rg} A = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} A = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$

$\Rightarrow S_A$ è iniettiva

Quindi S_A è iniettiva e suriettiva e quindi invertibile. $\boxtimes$

Quindi:

$$A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \text{ è invertibile}$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists\, B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \text{ t.c. } AB = \mathbb{1}_n.$$

La matrice B è unica e si chiama l'inversa di A e si denota con A^{-1}.

Come si trova $B = A^{-1}$?

$$AB = \mathbb{1}_n \iff AB^1 = e_1, AB^2 = e_2, \dots, AB^n = e_n$$

Quindi per trovare B dobbiamo risolvere n sistemi lineari con matrice dei coefficienti A e termini noti rispettivamente $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Dato che A è invertibile, $rref(A) = \mathbb{1}_n$ ed i sistemi lineari

$$AX = e_1, \; AX = e_2, \; \dots, \; AX = e_n$$

hanno un'unica soluzione che si trova con l'algoritmo di Gauss:

$$(A|e_1) \underset{R}{\leadsto} (\mathbb{1}_n|B^1) = rref(A|e_1)$$
$$(A|e_2) \underset{R}{\leadsto} (\mathbb{1}_n|B^2) = rref(A|e_2)$$
$$\vdots$$
$$(A|e_n) \underset{R}{\leadsto} (\mathbb{1}_n|B^n) = rref(A|e_n)$$

Notiamo che le operazioni elementari utilizzate per risolvere questi n sistemi lineari sono le stesse!

Allora conviene farle una volta sola: <u>ALGORITMO DI INVERSIONE</u>

$$(A|e_1|\dots|e_n) = (A|\mathbb{1}_n) \overset{6}{\leadsto} (\mathbb{1}_n|A^{-1})$$

Es: Stabilire se la seguente matrice A è invertibile e nel caso lo sia trovare la sua inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Sol.:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = S$$

$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} S = 2 \Rightarrow A$ è invertibile.

Calcoliamo A^{-1}

$$(A|\mathbb{1}_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{array}\right) \qquad -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{array}\right) = \operatorname{rref}(A|\mathbb{1}_2)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/7 & 1/7 \\ 3/7 & -2/7 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Teorema:

Una matrice $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{K})$

è invertibile se e solo se $ad-bc \neq 0$.

In questo caso

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

dim:

Se $a \neq 0$

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ c & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & d-\frac{bc}{a} \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = S$$

Quindi A è invertibile se e solo se

$$rg(A)=2 \iff rg(S)=rg(A)=2$$
$$\iff ad-bc \neq 0.$$

Se $a=0$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & b \end{pmatrix} = S'$$

A è invertibile $\iff rg(S')=rg(A)=2$

$\iff bc \neq 0 \iff ad-bc \neq 0.$

Dimostriamo adesso che se $ad-bc \neq 0$ allora $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$:

Se $a \neq 0$

$$(A|\mathbb{1}_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & d - \frac{bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{a} + \frac{bc}{a(ad-bc)} & -\frac{b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right)$$

Quindi

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Se $a=0$ e $ad-bc=-bc\neq 0$

$$(A\mid \mathbb{1}_2)=\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & b & 1 & 0\\ c & d & 0 & 1\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{cc|cc} c & d & 0 & 1\\ 0 & b & 1 & 0\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & d/c & 0 & 1/c\\ 0 & 1 & \frac{1}{b} & 0\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -d/bc & 1/c\\ 0 & 1 & 1/b & 0\end{array}\right)$$

Quindi $A^{-1}=-\dfrac{1}{bc}\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & 0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$

$\boxtimes$

Il numero $ad-bc$ associato ad $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ si chiama il <u>determinante</u> di A e si denota

$$\det A = ad-bc.$$

Es: Stabilire se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

è invertibile e nel caso lo sia calcolare l'inversa.

Sol.:

$$\det A = 2 \cdot 4 - (7)(-3) = 8 + 21 = 29 \neq 0$$

$\Rightarrow$ A è invertibile.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

verifichiamo

$$\frac{1}{29} \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} 29 & 0 \\ 0 & 29 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2.$$

$\blacksquare$

Proprietà delle matrici invertibili

Proposizione (Inversa del prodotto)
Date due matrici $A, B \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$,
il loro prodotto AB è invertibile
se e solo se sia A che B sono invertibili.
In questo caso
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

dim:

AB è invertibile.

$$\Updownarrow$$

$S_A \circ S_B : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ è invertibile

$$\Updownarrow$$

$S_A \circ S_B$ è iniettiva e suriettiva

Osserviamo che

$S_A \circ S_B$ iniettiva $\Rightarrow$ $\operatorname{Ker} S_B = \{0\}$ $\Rightarrow$ B invertibile

$S_A \circ S_B$ suriettiva $\Rightarrow$ $\operatorname{rg} A = n$ $\Rightarrow$ A invertibile.

Viceversa, se sia A che B sono invertibili, allora

$S_A \circ S_B$ è iniettiva (perché la composizione di funzioni iniettive è iniettiva) e

$S_A \circ S_B$ è suriettiva (perché la composizione di funzioni suriettive è suriettiva). Quindi

$S_A \circ S_B$ è invertibile.

Sia C l'inversa di AB. Allora

$$(AB)C = \mathbb{1}_n \Rightarrow A(BC) = \mathbb{1}_n$$

$$\Rightarrow BC = A^{-1}$$

$$\Rightarrow C = B^{-1}A^{-1}.$$

$\boxtimes$.

Cor: Siano $A_1, \dots, A_\ell \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ invertibili. Allora il loro prodotto $A_1 A_2 \cdots A_\ell$ è invertibile e

$$(A_1 A_2 \cdots A_\ell)^{-1} = A_\ell^{-1} A_{\ell-1}^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}$$

dim: Per induzione su ℓ.

Se $\ell = 2$, $(A_1 A_2)^{-1} = A_2^{-1} A_1^{-1}$ per la proposizione.

Supponiamo vero il risultato per $\ell-1$ e dimostriamolo per ℓ:

$$A_1 \cdots A_{\ell-1} A_\ell = (A_1 \cdots A_{\ell-1}) A_\ell$$

è invertibile $\underset{\text{prop}}{\Longleftrightarrow}$ $A_1 \cdots A_{\ell-1}$ e A_ℓ sono inv.

In tal caso

$$[(A_1 \cdots A_{\ell-1}) A_\ell]^{-1} \underset{\text{prop}}{=} A_\ell^{-1} (A_1 \cdots A_{\ell-1})^{-1}$$

$$\underset{\text{Induzione}}{=} A_\ell^{-1} (A_{\ell-1}^{-1} A_{\ell-2}^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1})$$

$\blacksquare$

Proposizione (Inversa della Trasposta)

Sia $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$. Allora

A è invertibile se e solo A^t è invertibile.

In questo caso

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t.$$

dim:

Dal Teorema di decomposizione sappiamo

A invertibile $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = n \Leftrightarrow \operatorname{rg} A^t = n \Leftrightarrow A^t$ invertibile

In questo caso, sia $B = A^{-1}$ l'inversa di A.

Allora

$$AB = \mathbb{1}_n \Rightarrow (AB)^t = (\mathbb{1}_n)^t = \mathbb{1}_n \Rightarrow B^t A^t = \mathbb{1}_n$$

Quindi

$$(A^t)^{-1} = B^t = (A^{-1})^t.$$

$\blacksquare$

Es: Semplificare l'espressione

$$\left[B^{-1}(A+B)A^{-1}\right]^t B^t$$

Sol.:

$$\left[B^{-1}(A+B)^t A^{-1}\right]^t B^t = (A^{-1})^t (A^t+B^t)(B^{-1})^t B^t =$$

$$= (A^t)^{-1}(A^t+B^t)(B^t)^{-1} B^t$$

$$= \left[(A^t)^{-1}A^t + (A^t)^{-1}B^t\right] \mathbb{1}_n$$

$$= \mathbb{1}_n + (A^t)^{-1}B^t.$$

Es: Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Trovare una matrice B t.c.

$$\left[B^{-1}(A+B)A^{-1}\right]^t B^t = O_{2\times 2}$$

Sol.: Dall'esercizio precedente, questa equazione matriciale è uguale a

$$\mathbb{1}_2 + (A^t)^{-1}B^t = O_{2\times 2}$$

ovvero

$$(A^t)^{-1}B^t = -\mathbb{1}_2$$

ovvero

$$(A^{-1})^t B^t = -\mathbb{1}_2^t$$

ovvero

$$(BA^{-1})^t = -\mathbb{1}_2^t$$

ovvero

$$BA^{-1} = -\mathbb{1}_2.$$

Quindi, $B = -A$.