- **Interpolazione polinomiale e determinante di Vandermonde**

Es: (Deflessione di una trave di acciaio)
Un ingegnere desidera stimare la deflessione di una trave d'acciaio sotto il carico di 2200 kg.
Egli conosce i seguenti dati sperimentali:

CARICO (kg):	1000	2000	3000
DEFLESSIONE (mm):	1.5	2.1	3.4

Un metodo comunemente usato per risolvere il problema è quello dell'interpolazione polinomiale: si cerca un polinomio p di grado 2 (poiché i dati sono 3) tale che

$$p(1000) = 1.5$$
$$p(2000) = 2.1$$
$$p(3000) = 3.4$$

Allora la stima sarebbe $p(2200)$.

Per trovare il polinomio

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

dobbiamo risolvere il seguente sistema nelle incognite a_0, a_1, a_2:

$$\begin{cases} a_0 + 1000\, a_1 + 1000^2 a_2 = 1.5 \\ a_0 + 2000\, a_1 + 2000^2 a_2 = 2.1 \\ a_0 + 3000\, a_1 + 3000^2 a_2 = 3.4 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1000 & 1000^2 \\ 1 & 2000 & 2000^2 \\ 1 & 3000 & 3000^2 \end{pmatrix}$$

è non-singolare !! Infatti il

- suo determinante è

$$\det A = 1000^2 \cdot 2000 = 2 \cdot 1000^3$$
$$= 2 \cdot 10^9 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Il sistema non solo è risolubile ma ha un'unica soluzione data da:

$$a_0 = 1.6$$

$$a_1 = -0.00045$$

$$a_2 = 0.00000035$$

Il polinomio $p(x) = 1.6 - 0.00045\,x + 0.00000035\,x^2$ si chiama il polinomio interpolatore dei 3 dati $(1000, 1.5), (2000, 2.1), (3000, 3.4)$.

Vediamo il problema generale dell'interpolazione polinomiale e la sua soluzione.

- Nell'esempio abbiamo visto che la matrice dei coefficienti del sistema che vogliamo risolvere è

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix}$$

dove $x_0 = 1000$, $x_1 = 2000$, $x_2 = 3000$.

<u>Def</u>: Dati $n+1$ numeri $x_0, x_1, \dots, x_n$ la <u>matrice di Vandermonde</u> ad essi associata è

$$V(x_0, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \in Mat_{(n+1)\times(n+1)}$$

Il suo determinante si denota con

$$D(x_0, \dots, x_n) = \det\left(V(x_0, \dots, x_n)\right)$$

e si chiama <u>determinante di Vandermonde</u>.

Es: ·) $V(a) = (1)$

·) $V(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{R})$

·) $V(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$

TEOREMA (di Vandermonde)

$$D(x_0, \dots, x_n) = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

dim: Dimostriamo il Teorema nei casi $n = 1, 2, 3$. Gli altri casi sono simili:

$\boxed{n=1}$: $D(x_0, x_1) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix} = x_1 - x_0$ ☐

$\boxed{n=2}$:

$$D(x_0, x_1, x_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 \\ 0 & x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 \\ x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0^2 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 + x_0 \\ 1 & x_2 + x_0 \end{pmatrix}$$

$$x_1^2 - x_0^2 = (x_1 - x_0)(x_1 + x_0)$$

$$x_2^2 - x_0^2 = (x_2 - x_0)(x_2 + x_0)$$

$$= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \quad \square$$

$$\boxed{n=3} : D(x_0, x_1, x_2, x_3) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & x_1^3 - x_0^3 \\ 0 & x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0^2 & x_2^3 - x_0^3 \\ 0 & x_3 - x_0 & x_3^2 - x_0^2 & x_3^3 - x_0^3 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_3 - x_0) \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 + x_0 & x_1^2 + x_0 x_1 + x_0^2 \\ 1 & x_2 + x_0 & x_2^2 + x_0 x_2 + x_0^2 \\ 1 & x_3 + x_0 & x_3^2 + x_0 x_3 + x_0^3 \end{pmatrix}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_3 - x_0) \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 + x_0 & (x_1 + x_0)^2 - x_0 x_1 \\ 1 & x_2 + x_0 & (x_2 + x_0)^2 - x_0 x_2 \\ 1 & x_3 + x_0 & (x_3 + x_0)^2 - x_0 x_3 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{(*)}{=} (x_1-x_0)(x_2-x_0)(x_3-x_0)$$

$$\left[\det\begin{pmatrix} 1 & x_0+x_1 & (x_0+x_1)^2 \\ 1 & x_0+x_2 & (x_0+x_2)^2 \\ 1 & x_0+x_3 & (x_0+x_3)^2 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 1 & x_0+x_1 & x_0x_1 \\ 1 & x_0+x_2 & x_0x_2 \\ 1 & x_0+x_3 & x_0x_3 \end{pmatrix}\right]$$

Osserviamo che

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_0+x_1 & x_0x_1 \\ 1 & x_0+x_2 & x_0x_2 \\ 1 & x_0+x_3 & x_0x_3 \end{pmatrix} = x_0 \det\begin{pmatrix} 1 & x_0+x_1 & x_1 \\ 1 & x_0+x_2 & x_2 \\ 1 & x_0+x_3 & x_3 \end{pmatrix}$$

$$= x_0\left[\det\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_1 \\ 1 & x_0 & x_2 \\ 1 & x_0 & x_3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1 \\ 1 & x_2 & x_2 \\ 1 & x_3 & x_3 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= x_0\left[x_0 \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \end{pmatrix} + 0\right] = 0$$

Quindi da $(*)$, otteniamo

$$V(x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_1-x_0)(x_2-x_0)(x_3-x_0) \cdot$$

$$V(x_0+x_1, x_0+x_2, x_0+x_3) =$$

$$\stackrel{\text{caso } n=2}{=} (x_1-x_0)(x_2-x_0)(x_3-x_0)(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$$

$\boxtimes$

NB: Il caso generale si fa similmente, ma usando la ovvia formula

$$a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\left(\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}\right)$$

al posto di

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

(che è la stessa formula per $n=2$), ed usando la formule di Newton:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

$\boxtimes$

Es:

·) $D(a,b)=(b-a)$

·) $D(a,b,c)=(b-a)(c-a)(c-b)$

·) $D(0,1)=1$

·) $D(0,1,2)=1\cdot2\cdot1=2$

·) $D(1,2,3)=1\cdot2\cdot1=2$

·) $D(0,1,2,3)=1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot1=12$.

__Teorema__ (Polinomio interpolatore)

Data una collezione di $(n+1)$ dati sperimentali:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

tale che le __ascisse sono distinte__, ovvero $x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j$, esiste un unico polinomio

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

di grado n tale che

$$p(x_i) = y_i \quad \forall i = 0, \dots, n.$$

Il polinomio p si chiama __polinomio interpolatore__ della collezione di dati.

dim: Dobbiamo risolvere il seguente sistema lineare di $(n+1)$ equazioni nelle $(n+1)$ incognite $a_0, \dots, a_n$:

$$(*) \begin{cases} a_0 + x_0 a_1 + x_0^2 a_2 + \dots + x_0^n a_n = y_0 \\ a_0 + x_1 a_1 + x_1^2 a_2 + \dots + x_1^n a_n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + x_i a_1 + x_i^2 a_2 + \dots + x_i^n a_n = y_i \\ \vdots \\ a_0 + x_n a_1 + x_n^2 a_2 + \dots + x_n^n a_n = y_n \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è la matrice di Vandermonde $V(x_0, \dots, x_n)$ il cui determinante è

$$D(x_0, \dots, x_n) = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

Poiché, per ipotesi, $x_i - x_j \neq 0 \ \forall i>j$, ne segue che $D(x_0, \dots, x_n) \neq 0$ e quindi il sistema $(*)$ ha un'unica soluzione. $\boxtimes$

Es: Calcolare esplicitamente i seguenti determinanti di Vandermonde e verificare la formula $D(x_0, \dots, x_n) = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$

1) $D(1,3)$

2) $D(-1,0,1)$

3) $D(-1,2,5)$

4) $D(-1,0,1,2)$

Sol:

1) $D(1,3) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 2 = 3-1$

2) $D(-1,0,1) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -(-1-1) = 2 = (0-(-1))(1-(-1))(1-0)$

3) $D(-1,2,5) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 24 \end{pmatrix} = 3 \cdot 18 = 54$

$= (2-(-1))(5-(-1))(5-2) = 3 \cdot 6 \cdot 3$

4) $D(-1,0,1,2) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} =$

$= -\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = 2 \cdot 6 = 12$

$= \underbrace{(0-(-1))}_{1} \underbrace{(1-(-1))}_{2} \underbrace{(2-(-1))}_{3} \underbrace{(1-0)}_{1} \underbrace{(2-0)}_{2} \underbrace{(2-1)}_{1}$

Es: Trovare il polinomio interpolatore delle seguenti collezioni di dati e disegnarne il grafico.

1) $(1,0),(2,2)$

2) $(-1,-1),(0,0),(1,-1)$

3) $(-1,-2),(0,1),(1,0),(2,-1)$

Sol.: 1) Dobbiamo risolvere $AX=Y$, dove

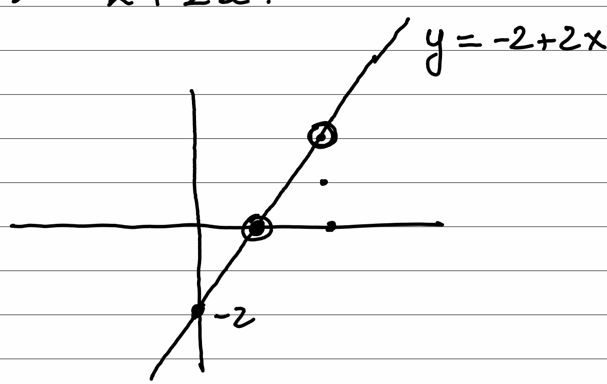
$A = Van(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\det A = D(1,2) = 1$. La soluzione è $Z = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dove

$a_1 = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -2$, $a_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$

$\Rightarrow$ Il polinomio interpolatore è

$p(x) = -2 + 2x$.



2) $A = \mathrm{Van}(-1, 0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\det A = (0-(-1))(1-(-1))(1-0) = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$

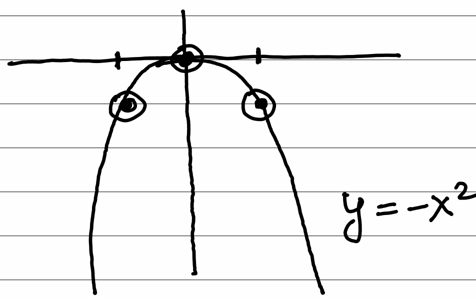
La soluzione è

$a_0 = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$

$a_1 = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0$

$a_2 = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -1$

Il polinomio interpolatore è $p(x) = -x^2$



3) $A = \mathrm{Van}(-1, 0, 1, 2)$, $Y = (-2, 1, 0, -1)$, $\det A = 12$.

Il polinomio interpolatore è

$p(x) = 1 + \frac{1}{3}x - 2x^2 + \frac{2}{3}x^2$