Prodotto righe per colonne

Es:

Prodotto	Albicocche	Arachidi	Arance	Clementine
prezzo al Kg sett. 1	2,18	3	2,20	2,79

Mi servono: 0,8 Kg di Albicocche
per domani 1 Kg di Arachidi
2 Kg di Arance
1,5 Kg di Clementine

Quanto spendo? Consideriamo
Matrice prezzi (in colonna): $P = \begin{pmatrix} 2{,}18 \\ 3 \\ 2{,}20 \\ 2{,}79 \end{pmatrix}$

Matrice quantità (in riga):

$$Q = (0{,}8 \, , 1 \, , 2 \, , 1{,}5)$$

La risposta è QP = prodotto riga per colonne

$$QP = (0,8)\cdot(2,18) + (1)(3) + 2(2,20) +$$

$$+ (1,5)(2.79)$$

$$= 13.3290 \text{ €}.$$

Es: Media dei voti pesata dai crediti:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Geometria} & : 9 \text{ crediti} \\ \text{Analisi} & : 9 \text{ crediti} \\ \text{Disegno} & : 6 \text{ crediti} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{crediti Totali:} \\ 9+9+6 = 24 \end{array}$$

Voto Geom : 26

Analisi : 25

Disegno : 27

Media pesata dai crediti

$$\frac{9\cdot 26 + 9\cdot 25 + 6\cdot 27}{24} = 25,875$$

Consideriamo la matrice (colonna) voti

$$V = \begin{pmatrix} 26 \\ 25 \\ 27 \end{pmatrix}$$

la matrice (riga) crediti

$$C = (9, 9, 6)$$

Il prodotto CV è

$$CV = 9 \cdot 26 + 9 \cdot 25 + 6 \cdot 27 \in \mathbb{R}$$

La media pesata dai crediti

$$\frac{1}{24} CV = 25.875 =: M$$

Per trasformarlo in /110 (ai fini del voto di laurea):

$$M : 30 = X : 110 \Rightarrow X = \frac{11}{30} M \sim 95$$

$\Rightarrow$ Media è $95/110$

Def: Data una matrice riga

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in Mat_{1\times n}$$

ed una matrice colonna

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in Mat_{n\times 1}$$

definiamo il loro prodotto come

$$XY = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \in \mathbb{R}$$

Abbiamo definito la funzione

$$\cdot : Mat_{1\times n} \times Mat_{n\times 1} \longrightarrow Mat_{1\times 1} = \mathbb{R}$$

$$(X, Y) \longmapsto XY.$$

Vogliamo estenderlo a matrici qualunque:

Es:

Prodotto	Albicocche	Arachidi	Arance	Clementine
prezzi al Kg sett. 2	2.25	2.7	2.05	2.99

A mia moglie servono in media a settimana

1.5 Kg di Albicocche
0.2 Kg Arachidi
2.5 Kg Arance
2.7 Kg Clementine

$$\begin{array}{l} I_o \to \\ \text{Moglie} \to \end{array} \begin{pmatrix} 0.8 & 1 & 2 & 1.5 \\ 1.5 & 0.2 & 2.5 & 2.7 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2.18 & 2.25 \\ 3 & 2.7 \\ 2.20 & 2.05 \\ 2.79 & 2.99 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \text{sett 1} & \text{sett 2} \end{array} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} 13.3290 & 13.085 \\ 16.9030 & 17.113 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{array}{ccc}
 & \text{Io sett 1} & \text{Io sett. 2} \\
= & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 13.329 & 13.085 \\ 16.303 & 17.113 \end{pmatrix}} \\
 & \text{Moglie sett 1} & \text{Moglie sett. 2.}
\end{array}
$$

Def: (Prodotto righe per colonne)

Date $A \in Mat_{m \times k}$ e $B \in Mat_{k \times n}$ definiamo la matrice prodotto righe per colonne di A e B come la matrice

$$AB \in Mat_{m \times n}$$

data da

$$(AB)_{ij} = A_i B^j$$

$$= a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ik} b_{kj}$$

$$= \sum_{s=1}^{k} a_{is} b_{sj}$$

Es: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq AB$$

Questo dimostra che se anche $m=n=k$ ed AB e BA sono definite,

$$AB \neq BA$$

in generale.

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{2\times 3}{A} \qquad\qquad \underset{3\times 2}{B}$$

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 B^1 & A_1 B^2 \\ A_2 B^1 & A_2 B^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 21 & -8 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -7 & -8 & -9 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{3 \times \boxed{2 \qquad 2} \times 3}_{3\times 3}$$

Es:

$\cdot)$ $(p, q, r) \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 9 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = (5p-3q+2r, \; 7p+9q-5r)$

$1 \times \boxed{3 \qquad 3} \times 2 \qquad\qquad 1 \times 2$

$\cdot)$ $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 9 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x+7y \\ -3x+9y \\ 2x-5y \end{pmatrix} \overset{!}{=} x \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix}$

$3 \times \boxed{2 \qquad 2} \times 1 \qquad\qquad 3 \times 1$

$\cdot)$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix}$

Def (Matrice identità)

La **matrice identità $n \times n$** è la matrice

$$\mathbb{1}_n \in Mat_{n\times n}$$

data da

$$(\mathbb{1}_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i\neq j \end{cases}$$

$$\mathbb{1}_1 = (1), \quad \mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{1}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\dots \qquad \mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

TEOREMA (Proprietà prod. righe x colonne)

Siano

$A, A' \in Mat_{m\times h}, B, B' \in Mat_{h\times K}, C \in Mat_{K\times m}$

Allora valgono le seguenti identità:

(1) $\mathbb{1}_m A = A = A \, \mathbb{1}_h$

(2) $A(BC) = (AB)C$

(3) $A(B+B') = AB + AB'$

$(A+A')B = AB + AB'$

(4) $c(AB) = (cA)B = A(cB) \quad \forall c \in \mathbb{R}$

(5) $(AB)^t = B^t A^t$

dim: $A \in Mat_{m\times h}$, $B \in Mat_{h\times k}$, $C \in Mat_{k\times n}$

1) $$(\mathbb{1}_m A)_{ij} = \sum_{s=1}^{m} (\mathbb{1}_m)_{is} A_{sj}$$

$$= (\mathbb{1}_m)_{ii} A_{ij} = A_{ij}$$

$$(\mathbb{1}_m)_{is} = \begin{cases} 0 & \text{se } s \neq i \\ 1 & \text{se } s = i \end{cases}$$

$$(A\, \mathbb{1}_n)_{ij} = \sum_{s=1}^{n} A_{is} (\mathbb{1}_n)_{sj} = A_{ij}$$

2) $$[A(BC)]_{ij} = \sum_{s=1}^{h} A_{is} (BC)_{sj}$$

$$= \sum_{s=1}^{h} A_{is} \left(\sum_{t=1}^{k} B_{st} C_{tj} \right)$$

$$= \sum_{s=1}^{h} \sum_{t=1}^{k} A_{is} (B_{st} C_{tj})$$

$$= \sum_{s,t} (A_{is} B_{st}) C_{tj}$$

$$= \sum_{t} \left(\sum_{s} A_{is} B_{st} \right) C_{tj}$$

$$= \sum_{t=1}^{k} (AB)_{it} \; C_{tj} =$$

$$= [(AB)\,C]_{ij} \, .$$

3) $$[A\,(B+B')]_{ij} = \sum_{s=1}^{h} A_{is}\,(B+B')_{sj}$$

$$= \sum_{s=1}^{h} A_{is}\,(B_{sj} + B'_{sj})$$

$$= \sum_{s=1}^{h} A_{is}\,B_{sj} + \sum_{s=1}^{h} A_{is}\,B'_{sj}$$

$$= (AB)_{ij} + (AB')_{ij} \, .$$

4) $$[c\,(AB)]_{ij} = c\,(AB)_{ij} = c \sum_{s=1}^{k} A_{is}\,B_{sj}$$

$$= \sum_{s=1}^{k} c\,A_{is}\,B_{sj} = \sum_{s} (c\,A_{is})\,B_{sj}$$

$$= \sum A_{is}\,(c\,B_{sj})$$

$$5)\ \left[(AB)^t\right]_{ij} = (AB)_{ji}$$

$$= \sum_{s=1}^{k} A_{js} B_{si} = \sum_{s=1}^{k} (A^t)_{sj} (B^t)_{is}$$

$$= \sum_{s=1}^{k} (B^t)_{is} (A^t)_{sj} = (B^t A^t)_{ij}.$$

$\boxtimes$

<u>OSS</u>: L'associatività $(AB)C = A(BC)$ si può dedurre dalla definizione:

$$S_{(AB)C} = S_{AB} \circ S_C = (S_A \circ S_B) \circ S_C = S_A \circ (S_B \circ S_C)$$

$$= S_A \circ S_{BC} = S_{A(BC)}.$$

Es: Semplificare l'espressione matriciale

$$A\left(BD-2(CD)^t\right)+A\left(2D^t-B\right)C^t+\left(A^tB^t-B^tA^t\right)^tD$$

Sol.:

$$A\cancel{BD}-2A\cancel{(CD)^t}+2\cancel{AD^t}C^t-ABC^t+BAD-\cancel{ABD}$$

$$=-ABC^t+BAD.$$

Def: A, B si dicono compatibili per la moltiplicazione se AB è definita.

Es: Calcolare il prodotto AB delle seguenti matrici complesse

$$A = \begin{pmatrix} i & 2+3i & 1-i \\ 1+i & 2i & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -i & 1-i \\ 2-3i & -2i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}$$

Sol.:

$$AB = \begin{pmatrix} |i|^2 + |2+3i|^2 + |1-i|^2 & i+1-4i+6+1-i \\ -i+1+4i+6+1+i & |1+i|^2 + |2i|^2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 16 & 8-4i \\ 8+4i & 7 \end{pmatrix} \qquad \blacksquare$$

Def: Data $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{C})$ definiamo la sua <u>coniugata</u> come la matrice

$$\overline{A} \in Mat_{m\times n}(\mathbb{C})$$

$$\overline{A}_i^j = \overline{(A_i^j)}$$

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1+2i & 2-3i \\ 1-i & 2+4i \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} 1-2i & 2+3i \\ 1+i & 2-4i \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{A} = A$$

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 2i & 1+3i \\ 4i & 1-2i \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{A}^t = \begin{pmatrix} 1-i & -2i & -4i \\ 1+i & 1-3i & 1+2i \end{pmatrix}$$

Matrici quadrate

Una matrice $A \in Mat_{m \times n}$ si dice <u>quadrata</u> se $m = n$ ovvero se ha lo stesso numero di righe e colonne.

Due matrici (quadrate) $A, B \in Mat_{n \times n}$ <u>commutano</u> tra loro se

$$AB = BA.$$

In generale, due matrici non commutano tra loro.

<u>Def</u>: Una matrice A si dice <u>scalare</u> se è un multiplo scalare di $\mathbb{1}_n$:

$$A = c\,\mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c \end{pmatrix}$$

Le matrici scalari commutano con tutte:

$$(c\,\mathbb{1}_n)B = c(\mathbb{1}_n B) = cB = c(B\mathbb{1}_n) = B(c\,\mathbb{1}_n).$$

Def: Una matrice quadrata D si dice **diagonale** se

$$D_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$$

i.e.

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & D_{nn} \end{pmatrix}$$

Es:

·) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, ..., $\mathbb{1}_n$

·) $\mathbb{O}_{n \times n}$

·) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ·) $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ ...

Notazione:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} =: \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n).$$

In generale, non è vero che le matrici diagonali commutano con tutte le altre:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Però commutano tra loro:

<u>Prop.</u>: $D_1 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$D_2 = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$

$\Rightarrow D_1 D_2 = \mathrm{diag}(\lambda_1\mu_1, \dots, \lambda_n\mu_n) = D_2 D_1$

<u>dim</u>:

$$(D_1 D_2)_{ij} = \sum_s (D_1)_{is}(D_2)_{sj} = (D_1)_{ii}(D_2)_{ij} + (D_1)_{ij}(D_2)_{jj}$$

10

In particolare,

$$D^n = \mathrm{diag}(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_n^n).$$

È facile calcolare le potenze di una matrice diagonale.

<u>Def</u>: Una matrice $A \in Mat_{n \times n}$ si dice NILPOTENTE se $\exists\, k$ t.c.

$$A^k = 0_{n \times n}.$$

<u>Es</u>:
·) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leadsto A^2 = 0_{2 \times 2}$

Esponenziale:

Sia A una matrice nilpotente, $A^k = 0$.
L'**esponenziale** di A è la matrice

$$e^A = \exp(A) = \sum_{s=0}^{k-1} \frac{1}{s!} A^s$$

$$= \mathbb{1}_n + A + \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \frac{1}{4!} A^4 + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{(k-1)!} A^{k-1}.$$

Es:

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ? \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = AA^2 = 0_{3\times 3}$$

$$\exp(A) = \mathbb{1}_3 + A + \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{6} \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{A^3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Trovare X t.c. $AX = b$

Sol.:

$$\underset{2\times 2}{A} \; \underset{\boxed{2\times 1}}{X} = \underset{2\times 1}{b} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{matrix} x_1 + 2x_2 = -1 \\ 3x_2 = 1 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} x_2 = 1/3 \\ x_1 = -1 - \frac{2}{3} = \\ = -\frac{5}{3} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} -5/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boxtimes$$

Matrici a blocchi

Supponiamo di voler calcolare il quadrato della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{4\times 4}$$

Dovremmo eseguire $\geq 4^2 = 16$ operazioni. Invece possiamo ridurre notevolmente il numero di operazioni se osserviamo che A è divisa in blocchi 2×2

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline -1 & -2 & -3 & -4 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} B & C \\ -B & -C \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Possiamo eseguire il calcolo come se A fosse una matrice 2x2:

$$A^2 = \begin{pmatrix} B & C \\ -B & -C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & C \\ -B & -C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^2-CB & BC-C^2 \\ -B^2+CB & -BC+C^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (B-C)B & (B-C)C \\ -(B-C)B & -(B-C)C \end{pmatrix}$$

Resta solo da calcolare le due matrici 2x2 $(B-C)B$ e $(B-C)C$:

$$(B-C)B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -16 \\ -12 & -16 \end{pmatrix}$$

$$(B-C)C = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & -24 \\ -20 & -24 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -12 & -16 & -20 & -24 \\ -12 & -16 & -20 & -24 \\ 12 & 16 & 20 & 24 \\ 12 & 16 & 20 & 24 \end{pmatrix}$$

In MATLAB
data una matrice A
la sottomatrice di A supportata
sulle righe $i_1, i_2, .., i_k$ e
sulle colonne $j_1, j_2, .., j_h$ si denota

$$A([i_1, i_2, .., i_k], [j_1, j_2, .., j_h]).$$

<u>Es</u>: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

$$A([1,3],[2,3]) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A([1,2],[1,2,3]) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

TEOREMA :

·) $A \in Mat_{m\times n}$, $B \in Mat_{n\times k}$

$$AB = [AB^1, AB^2, \dots, AB^k]$$

·) $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$AX = x_1 A^1 + x_2 A^2 + \dots + x_n A^n .$$

·) $A = \begin{bmatrix} B & X \\ 0 & C \end{bmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} B' & X' \\ 0 & C' \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow AA' = \begin{pmatrix} BB' & BX' + XC' \\ 0 & CC' \end{pmatrix}$$

·) $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} A_1' & A_2' \\ A_3' & A_4' \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow AA' = \begin{pmatrix} A_1A_1' + A_2A_3' & A_1A_2' + A_2A_4' \\ A_3A_1' + A_4A_3' & A_3A_2' + A_4A_4' \end{pmatrix}$$

Es: •) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a x_1 + b x_2 \\ c x_1 + d x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

•) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^n = ?$

Sol.:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} A_1^2 & A_1 A_2 + A_2 A_3 \\ 0 & A_3^2 \end{pmatrix}$$

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_1$$

$$A_1 A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 A_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -A_2$$

$$\Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} A_1 & 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - A_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 & A_2' \\ 0 & -A_3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & A_2' \\ 0 & -A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^2 & A_1 A_2' - A_2 A_3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 A_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & -A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$$

Es:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 8 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Decomponiamo a blocchi A:

$$A=\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & -1 & 7 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline 0 & R \end{array}\right)$$

Decomponiamo a blocchi $B=\begin{pmatrix} B(1,1) \\ B(2,1) \end{pmatrix}$ in maniera che

$PB(1,1)$ e $Q\,B(2,1)$

siano definiti

$$B=\left(\begin{array}{cc} -2 & 0 \\ 5 & 8 \\ \hline 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -4 & 0 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B(1,1) \\ B(2,1) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow AB=\begin{pmatrix} PB(1,1)+Q\,B(2,1) \\ R\,B(2,1) \end{pmatrix}=\Big($$

$\therefore$

MATLAB:

$A \in Mat_{m \times k}$, $B \in Mat_{k \times n}$

$A * B$ comando MATLAB

Es: $A = [1, 2, 3; 4, 5, 6]$

$B = [0, 0, 0; 1, 1, 1; 2, 2, 2]$

$$A * B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 17 & 17 & 17 \end{pmatrix}$$

$= [8, 8, 8; 17, 17, 17]$

$B * A =$ Error.

Matrici quadrate

Il prodotto righe x colonne definisce una operazione sulle matrici quadrate

$$\cdot : Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \times Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \to Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$$

t.c.

1) Associativa
2) El. neutro

El. inverso?

Sappiamo cosa sono le inverse destre e sinistre di S_A, per $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$

In termini del prodotto righe per colonne

$AB = \mathbb{1}_m \Rightarrow B$ è INV. DESTRA di A

$BA = \mathbb{1}_n \Rightarrow B$ è Inv. SINISTRA di A.

Se $m = n$:

$AB = BA = \mathbb{1}_n \Rightarrow B = A^{-1}$ è l'inversa di A.

Non tutte le matrici (non-nulle) ammettono inversa.

Es: Se $A \neq 0$ è nilpotente, allora A non ammette inversa.

Infatti, se $A^k = 0$ ed $\exists\, B$ t.c. $AB = \mathbb{1}$ allora

$$A^{k-1} = A^{k-1}\mathbb{1} = A^{k-1}(AB) = A^k B = 0.$$

$\boxtimes$

Vedremo criteri per stabilire se una matrice quadrata è invertibile e nel caso lo sia studieremo delle tecniche per calcolare l'inversa.

Se la matrice A non è quadrata non è vero che l'inverse destra e sinistra coincidono:

Es:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2$$

A è un'inverse sinistra di B

B è un'inverse destra di A

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbb{1}_3$$

$\boxtimes$

A che serve l'inversa?

<u>Es</u> [Nicholson. Es. 1.5.1]:

Un aereo spia vola su un territorio nemico e comunica via radio, al quartier generale, la sua posizione

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

dove x e y indicano la longitudine e la latitudine del luogo sorvolato, rispettivamente. Per evitare il rischio che i dati trasmessi vengano intercettati, essi vengono cifrati in modo da rendere segreto il loro contenuto. Come metodo di cifratura si sceglie di moltiplicare a sinistra la matrice delle coordinate della posizione X per

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

in modo da ottenere le seguenti coordinate cifrate

$$X' = AX = \begin{pmatrix} 3x - 4y \\ 2x + 7y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Supponendo che il quartier generale riceve le coordinate cifrate, come fa a decifrarle?

Sol.:

Il quartier generale sa che $X' = AX$.

La matrice A è invertibile:

$$A^{-1} = \frac{1}{29}\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Allora

$$X' = AX \Rightarrow A^{-1}X' = A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X$$
$$= \mathbb{1}X = X$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}X' = \frac{1}{29}\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{7}{29}x' + \frac{4}{29}y'$$

$$y = -\frac{2}{29}x' + \frac{3}{29}y'$$

$\boxtimes$

In generale, supponiamo di voler trovare tutte le matrici X t.c.

$$AX = B$$

Se A è invertibile $\exists ! X$:

$$B = AX \Rightarrow$$

$$A^{-1}B = A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = X$$

Quindi se A è invertibile l'equazione matriciale

$$AX = B$$

ammette l'unica soluzione

$$X = A^{-1}B$$