Struttura metrica standard di $\mathbb{R}^n$

Abbiamo studiato la struttura metrica standard di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^3$.
Adesso generalizziamo al caso di $\mathbb{R}^n$.
Tutte le dimostrazioni sono uguali al caso di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^3$ e quindi sono omesse.

<u>Def</u>: Il <u>prodotto scalare standard</u> di $\mathbb{R}^n$ (o prodotto puntino) è la funzione

$$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(X, Y) \longmapsto X \cdot Y := X^t Y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

<u>Es</u>:
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -1.$$

- Il prodotto scalare standard è bilineare, simmetrico e definito positivo (Esercizio!)

- La <u>norma</u> di X rispetto a $\cdot$ è il numero

$$\|X\| := \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

quindi è una funzione

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

e gode delle seguenti proprietà

- $\|X\| \geq 0$
- $\|X\| = 0 \iff X = 0_{\mathbb{R}^n}$
- $\|\lambda X\| = |\lambda| \, \|X\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall X \in \mathbb{R}^n$

Vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

- $-\|X\| \, \|Y\| \leq X \cdot Y \leq \|X\| \, \|Y\|$

da cui segue la disuguaglianza Triangolare

- $\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$.

- $\|X+Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2 + 2\, X \cdot Y.$

- Il coseno dell'angolo $\widehat{XY}$ tra due vettori $X, Y \in \mathbb{R}^n$ è

$$\cos \widehat{XY} := \frac{X \cdot Y}{\|X\| \|Y\|}$$

- Due vettori $X, Y \in \mathbb{R}^n$ sono ortogonali o perpendicolari se

$$X \cdot Y = 0$$

- Teorema di Pitagora

$$\|X+Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2 \quad \text{se} \quad X \cdot Y = 0.$$

- Se $U \subseteq \mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale l'insieme

$$U^\perp = \{X \in \mathbb{R}^n \mid X \cdot u = 0 \quad \forall u \in U\}$$

si chiama l'ortogonale a U.

$U^\perp$ è un sottospazio vettoriale.

Teorema di decomposizione ortogonale

Sia $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$. Allora

$$\mathbb{R}^m = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Ker} A^t.$$

Inoltre la somma diretta è ortogonale nel seguente senso

$$\operatorname{Ker} A^t = (\operatorname{Im} A)^\perp$$

<u>dim</u>: Poiché $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\operatorname{Im} A \subseteq \mathbb{R}^m$ e $A^t \in Mat_{n\times m}(\mathbb{R})$ e quindi $\operatorname{Ker} A^t \subseteq \mathbb{R}^m$. Quindi

$$\operatorname{Im} A,\ \operatorname{Ker} A^t \subseteq \mathbb{R}^m$$

sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^m$.

Facciamo vedere che la loro intersezione è banale:

Sia $X \in \operatorname{Im} A \cap \operatorname{Ker} A^t$. Allora $X = AY$ per qualche $Y \in \mathbb{R}^n$.

Si ha

$$X \cdot X = AX \cdot X = (AX)^t X = (X^t A^t) X$$

$$= X^t (A^t X) = 0$$

$$\Rightarrow \|X\| = 0 \Rightarrow X = 0_{\mathbb{R}^m}.$$

Ne segue che

$$\operatorname{Im} A \cap \operatorname{Ker} A^t = \{0_{\mathbb{R}^m}\}.$$

Dalla formula di Grassmann

$$\dim(\operatorname{Im} A + \operatorname{Ker} A^t) = \operatorname{rg} A + \dim \operatorname{Ker} A^t$$

$$= \operatorname{rg} A^t + \dim \operatorname{Ker} A^t = m$$

$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^t$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^m = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Ker} A^t.$$

Facciamo vedere che

$$(\mathrm{Im}\,A)^\perp = \mathrm{Ker}\,A^t.$$

Sia $X \in (\mathrm{Im}\,A)^\perp$. Allora, $\forall Y \in \mathbb{R}^n$

$$0 = X \cdot AY = A^t X \cdot Y$$

$\Rightarrow$ $A^t X$ è ortogonale ad ogni $Y \in \mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ $A^t X$ è ortogonale a se stesso $\Rightarrow$ $A^t X = 0_{\mathbb{R}^n}$

$\Rightarrow$ $X \in \mathrm{Ker}\,A^t$.

Viceversa, sia $X \in \mathrm{Ker}\,A^t$. Allora $\forall Y \in \mathbb{R}^n$

$$X \cdot AY = A^t X \cdot Y = 0$$

$\Rightarrow$ $X \in (\mathrm{Im}\,A)^\perp$.

Concludiamo che

$$(\mathrm{Im}\,A)^\perp = \mathrm{Ker}\,A^t.$$

Questo Teorema può essere usato per trovare le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} A$:

Se $U = \operatorname{Im} A$ e $\operatorname{Ker} A^t$ ha come base $\{z_1, \dots, z_{n-r}\}$ allora

$$U: \begin{cases} z_1 \cdot X = 0 \\ z_2 \cdot X = 0 \\ \vdots \\ z_{n-r} \cdot X = 0 \end{cases}$$

Eq. cart. di U.

Es: $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\operatorname{Ker} (1\ 1\ 1) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$U: \begin{cases} -x + y = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

Corollario:

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale. Allora

$$\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$$

dim: Sia $\{v_1, \dots, v_r\}$ una base di U. Poniamo

$$A = (v_1 | \dots | v_r) \in Mat_{n \times r}(\mathbb{R}).$$

Allora

$$U = \operatorname{Im} A.$$

Quindi

$$U^\perp = (\operatorname{Im} A)^\perp = \operatorname{Ker} A^t$$ e

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Ker} A^t = U \oplus U^\perp.$$

$\boxtimes$

Proiezione ortogonale

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale. Dal Teorema di decomposizione ortogonale sappiamo che

$$\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$$

quindi,

$\forall X \in \mathbb{R}^n \ \exists!\, u \in U$ e $\exists!\, v \in U^\perp$ t.c.

$$X = u + v.$$

La <u>proiezione ortogonale</u> su U è la funzione

$$pr_U : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$X \longmapsto u$$

Osserviamo che pr_U è ben definita, lineare (esercizio), $\operatorname{Im} pr_U = U$ e $\operatorname{Ker} pr_U = U^\perp$.

Teorema (Proiezione ortogonale)

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale. Allora la matrice che rappresenta pr_U nella base standard di $\mathbb{R}^n$ è

$$P_U = A\,(A^t A)^{-1} A^t$$

dove A è una matrice che ha per colonne una base di U, ovvero A è una matrice t.c.

- $\operatorname{rg} A = \dim U = r$
- $A \in Mat_{n\times r}(\mathbb{R})$.

dim: La proiezione ortogonale

$$pr_U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

è lineare. Sia P_U la matrice che la rappresenta nella base standard di $\mathbb{R}^n$. Sia $\{v_1, \dots, v_r\}$ una base di U e sia

$$A = (v_1 | \dots | v_r) \in Mat_{n \times r}(\mathbb{R}).$$

Allora $\operatorname{Im} A = U$ e $\operatorname{rg} A = r$.

Per ogni $X \in \mathbb{R}^n$, $P_U X \in \operatorname{Im} A$.

Quindi $\exists\, Y \in \mathbb{R}^r$ t.c.

$$P_U X = A Y.$$

Si ha

$$X - P_U X \in (\operatorname{Im} A)^{\perp} = \operatorname{Ker} A^t$$

$$\Rightarrow A^t (X - P_U X) = 0$$

$$\Rightarrow A^t X = A^t P_U X = A^t A Y$$

Vale la seguente:

<u>Prop.</u>: Sia $A \in Mat_{n \times r}(\mathbb{R})$. Allora

$$\operatorname{Ker} A^t A = \operatorname{Ker} A.$$

In particolare,

$$\operatorname{rg} A^t A = \operatorname{rg} A.$$

<u>dim</u>: Sia $X \in \operatorname{Ker} A^t A$. Allora

$$AX \cdot AX = X^t A^t A X = 0$$

$$\Rightarrow \|AX\| = 0 \Rightarrow AX = 0_{\mathbb{R}^n}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ker} A^t A \subseteq \operatorname{Ker} A.$$

Viceversa, sia $X \in \operatorname{Ker} A$. Allora

$$A^t A X = A^t (AX) = 0_{\mathbb{R}^r}$$

$$\Rightarrow X \in \operatorname{Ker} A^t A, \qquad \boxtimes$$

Nel nostro caso,

$$\mathrm{rg}\, A^t A = \mathrm{rg}\, A = 2$$

e quindi $A^t A$ è invertibile.

Ne segue che

$$Y = (A^t A)^{-1} A^t X .$$

Mettendo tutto insieme otteniamo

$$P_U X = AY = A (A^t A)^{-1} A^t X$$

$\blacksquare$

<u>Es</u>: $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle .$

Allora

$$P_U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \left((1\,1\,1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} (1\,1\,1)$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \quad \blacksquare$$

La matrice di proiezione ortogonale si può usare per calcolare distanze.

COR: Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale e sia $X \in \mathbb{R}^n$. Allora

$$\operatorname{dist}(X, U) = \operatorname{dist}(X, P_U X)$$

$$= \| X - P_U X \|$$

dim: $\forall u \in U$

$$\|X - u\|^2 = \| \underbrace{X - pr_U(x)}_{\in U^\perp} + \underbrace{pr_U(x) - u}_{\in U} \|^2$$

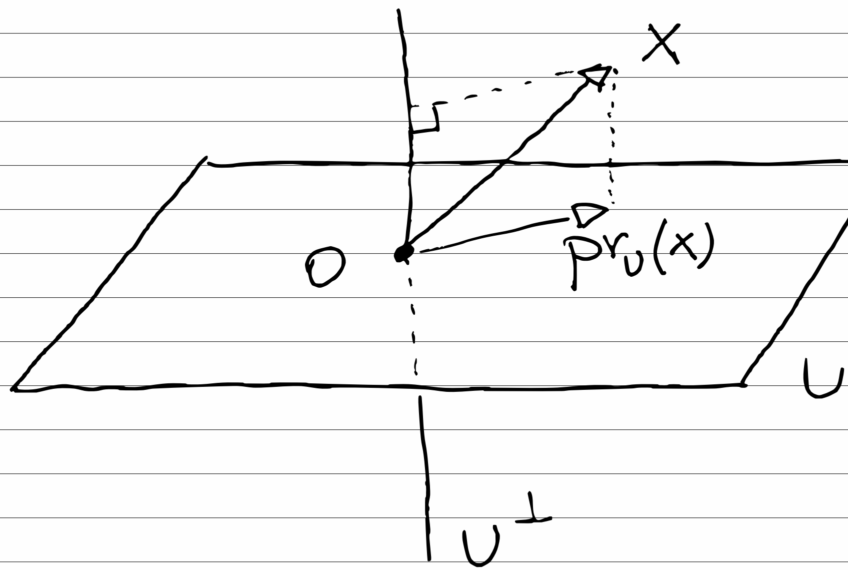
Pitagora

$$= \|X - pr_U(x)\|^2 + \|pr_U(x) - u\|^2$$

$$\geq \|X - pr_U(x)\|^2.$$

L'uguaglianza vale se e solo se $u = pr_U(X)$. $\boxtimes$

Quindi, $P_U X$ è il vettore di U più vicino a X.
L'intuizione geometrica deve essere chiara:



Es: Calcolare la distanza di

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$ dal sottospazio

$$U: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Sol.: Calcoliamo la matrice di proiezione ortogonale su U: cerchiamo una base di U

$$U = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Poniamo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Allora

$$P_U = A\left(A^t A\right)^{-1} A^t$$

Calcoliamo:

$$A^t A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(A^t A\right)^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_U = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{pr}_U(X) = P_U X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{dist}(X, U) = \| X - P_U X \| = \frac{1}{5} \left\| \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \frac{3}{5} \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{3}{5} \sqrt{4+4+1+1}$$

$$= \frac{3}{5}\sqrt{10}$$

Insiemi ortogonali e ortonormali

Un insieme di vettori non-nulli

$$\{F_1, \dots, F_k\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$$

si dice <u>ortogonale</u> se

$$F_i \cdot F_j = 0 \quad \forall i \neq j.$$

<u>Esercizio</u>: Un insieme ortogonale è linearmente indipendente.

Un insieme di vettori non-nulli

$$\{E_1, \dots, E_k\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$$

si dice <u>ortonormale</u> se

1) $E_i \cdot E_j = 0 \quad \forall i \neq j$

2) $E_i \cdot E_i = 1.$

Quindi un insieme ortonormale è un insieme ortogonale composto di versori.

Matrici ortogonali

Sia $\{E_1, \dots, E_k\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ un insieme ortonormale.

Consideriamo la matrice
$$B = (E_1 | \dots | E_k) \in Mat_{n \times k}(\mathbb{R})$$
che li ha come colonne.

Allora $rg\, B = k$ e
$$B^t B = \begin{pmatrix} — E_1^t — \\ \vdots \\ — E_k^t — \end{pmatrix} (E_1 | \dots | E_k) = \mathbb{1}_k$$

Se $k = n$, B è invertibile e $B^{-1} = B^t$.

<u>Def</u>: Una matrice $B \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$ si dice <u>ortogonale</u> se le colonne di B sono un insieme ortonormale di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$.

OSS: Una matrice $n \times n$ B è ortogonale se e solo se
$$B^t B = \mathbb{1}_n.$$

Def: Il gruppo delle matrici ortogonali $n \times n$ si denota con
$$O(n) = \{ B \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid B^t B = \mathbb{1}_n \}.$$

Se $B \in O(n)$ allora $B^{-1} = B^t$.

OSS: $B \in O(n) \Rightarrow \det B \in \{-1, +1\}$.

Def:
$$SO(n) = \{ B \in O(n) \mid \det(B) = 1 \}.$$

Coefficienti di Fourier

Sia $\mathcal{B} = \{F_1, \dots, F_n\}$ una base ortogonale di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$. Allora $\forall X \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$X = \frac{X \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 + \dots + \frac{X \cdot F_n}{F_n \cdot F_n} F_n .$$

dim: Poiché $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, esistono unici $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ t.c.

$$X = y_1 F_1 + \dots + y_n F_n .$$

Allora $X \cdot F_i = y_i \, F_i \cdot F_i$ e quindi

$$y_i = \frac{X \cdot F_i}{F_i \cdot F_i}$$

come volevasi dimostrare. ∎

I numeri $\left\{ \frac{X \cdot F_i}{F_i \cdot F_i} \right\}_{i=1}^{n}$ si chiamano i coefficienti di Fourier di X nella base (ortogonale) $\mathcal{B}$.

Es: Sia $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right\}$.

Dimostrare che $\mathcal{B}$ è una base ortogonale di $(\mathbb{R}^3,\cdot)$ e calcolare i coefficienti di Fourier di $X=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ in $\mathcal{B}$.

Sol.: $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=0$; $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}=0$; $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}=0$

$\Rightarrow \mathcal{B}$ è ortogonale.

$$X=\frac{X\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{X\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\frac{X\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{2}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\frac{(-2)}{6}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \checkmark$$

I coefficienti di Fourier di X in $\mathcal{B}$ sono le componenti del vettore

$$F_{\mathcal{B}}(X)=\begin{pmatrix}1\\1/3\\-1/3\end{pmatrix}.$$

Calcolo della proiezione ortogonale con i coefficienti di Fourier

Studiamo un'altra tecnica per calcolare la proiezione ortogonale di un vettore X su un sottospazio vettoriale U.

Ricordiamo che se $\{F_1, \dots, F_n\}$ è una base ortogonale di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ allora $\forall X \in \mathbb{R}^n$

$$X = \frac{X \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 + \frac{X \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 + \dots + \frac{X \cdot F_n}{F_n \cdot F_n} F_n$$

ed i numeri $\left\{ \frac{X \cdot F_i}{F_i \cdot F_i} \right\}$ si chiamano i coefficienti di Fourier di X nella base ortogonale $\{F_1, \dots, F_n\}$.

Prop. : Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale. Sia $X \in \mathbb{R}^n$. Sia $\{F_1, \dots, F_k\}$ una base ortogonale di U. Allora

$$\boxed{pr_U(X) = \frac{X \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 + \dots + \frac{X \cdot F_k}{F_k \cdot F_k} F_k}$$

dim : Dato che $\{F_1, \dots, F_k\}$ è una base di U e $pr_U(X) \in U$ $\exists!\ y_1, \dots, y_k \in \mathbb{R}$ t.c.

$$pr_U(X) = y_1 F_1 + \dots + y_k F_k .$$

Per definizione,

$$(X - pr_U(X)) \cdot F_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Quindi:

$$X \cdot F_i - y_i F_i \cdot F_i = 0 \Rightarrow y_i = \frac{X \cdot F_i}{F_i \cdot F_i} \quad \blacksquare$$

Quindi, per calcolare $pr_U(X)$ abbiamo due metodi

1) Troviamo una base $\{v_1, \dots, v_k\}$ di U, consideriamo la matrice $A = (v_1 | \dots | v_k)$, calcoliamo $P_U = A(A^tA)^{-1}A^{-1}$ e allora

$$pr_U(X) = P_U X$$

2) Se conosciamo una base <u>ortogonale</u> $\{F_1, \dots, F_k\}$ di U, allora

$$pr_U(X) = \frac{X \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 + \dots + \frac{X \cdot F_k}{F_k \cdot F_k} F_k.$$

Vediamo ora che esiste un metodo algoritmico per ottenere una base ortogonale di U conoscendo una sua base.

Algoritmo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt

È sempre possibile "raddrizzare" una base ed inoltre si può fare con un algoritmo che si chiama <u>algoritmo di Gram-Schmidt</u>.

Illustriamo l'algoritmo per $n=3$ e poi diamo la formulazione generale:

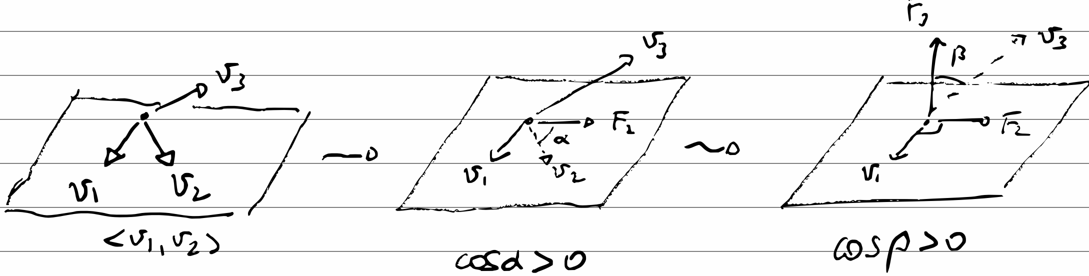
$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ base di V. Sia s un prodotto scalare su V. Consideriamo:

$$F_1 = v_1$$

$$F_2 = v_2 - pr_{F_1}(v_2) = v_2 - \frac{(v_2, F_1)}{(F_1, F_1)} F_1$$

$$F_3 = v_3 - pr_{\langle v_1, v_2 \rangle}(v_3)$$

$$= v_3 - \frac{v_3 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 - \frac{v_3 \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2$$



<u>Teorema</u>: Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_k\} \subset U$ una base di U. Allora esiste una base $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_k\}$ di U con le seguenti propietà:

1) $\mathcal{E}$ è ortonormale
2) $\langle v_1, \dots, v_i \rangle = \langle E_1, \dots, E_i \rangle \quad \forall i = 1, \dots, k$
3) $v_i \cdot E_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$.

La base $\mathcal{E}$ si ottiene come segue: definiamo

$$F_1 := v_1$$

e per ogni $i \geq 2$:

$$\boxed{F_i := v_i - pr_{\langle v_1, \dots, v_{i-1} \rangle}(v_i) = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{v_i \cdot F_j}{F_j \cdot F_j} F_j}$$

Allora

$$E_i := \frac{F_i}{\|F_i\|} \qquad \forall i = 1, \dots, n.$$

dim:

Per il lemma di scambio,

$$\langle v_1, \dots, v_i \rangle = \langle F_1, \dots, F_i \rangle.$$

Per costruzione, per ogni $i \geq 2$

$$F_i \perp \langle v_1, \dots, v_{i-1} \rangle$$

Poiché $\{F_1, \dots, F_i\}$ è una base ortogonale di $\langle v_1, \dots, v_i \rangle$,

$$v_i = \sum_{j=1}^{i} \frac{v_i \cdot F_j}{F_j \cdot F_j} F_j \Rightarrow v_i \cdot v_i = \sum_{j=1}^{i} \frac{(v_i \cdot F_j)^2}{F_j \cdot F_j}$$

inoltre

$$pr_{\langle v_1, \dots, v_{i-1} \rangle}(v_i) = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{v_i \cdot F_j}{F_j \cdot F_j} F_j$$

per cui:

$$v_i \cdot pr_{\langle v_1, \dots, v_{i-1} \rangle}(v_i) = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(v_i \cdot F_j)^2}{F_j \cdot F_j}$$

$$v_i \cdot F_i = v_i \cdot v_i - v_i \cdot pr_{\langle v_1, \dots, v_{i-1} \rangle}(v_i)$$

$$= \frac{(v_i \cdot F_i)^2}{F_i \cdot F_i} > 0 \qquad \boxtimes$$

Es: Ortonormalizzare la base

$$\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

di $\mathbb{R}^3$

Sol.: $F_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$F_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 = v_2 - \frac{2}{2} F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 - \frac{v_3 \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 =$$

$$= v_3 - 0\, F_1 - \frac{2}{1} F_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \left\{ F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, F_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortogonale di $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ e

$$\langle F_1, F_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 = x_3 \right\}$$

Normalizziamo

$$\mathcal{E} = \left\{ E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\boxtimes$

Es:

$$V = \left\langle v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^4$$

Troviamo una base ortonormale con il procedimento di Gram-Schmidt:

$$F_1 = v_1$$

$$F_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 = v_2 - \frac{2}{2} F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 - \frac{v_3 \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 = v_3 - \frac{1}{2}$$

$$= v_3 - \frac{1}{2} F_1 - \frac{2}{2} F_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$\{F_1, F_2, F_3\}$ è una base ortogonale.

Possiamo anche scegliere

$$F_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortonormale di V.

Possiamo applicare il procedimento di Gram-Schmidt ad un insieme qualunque di vettori:

Dato $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ definiamo

$$F_1 = v_1$$

$$F_2 = v_2 - \alpha_{12} F_1$$

$$F_3 = v_3 - \alpha_{13} F_1 - \alpha_{23} F_2$$

$$F_4 = v_4 - \alpha_{14} F_1 - \alpha_{24} F_2 - \alpha_{34} F_3$$

$$\vdots$$

$$F_n = v_n - \alpha_{1n} F_1 - \alpha_{2n} F_n - \dots - \alpha_{n-1,n} F_{n-1}$$

dove

$$\alpha_{ji} = \begin{cases} \dfrac{v_i \cdot F_j}{F_j \cdot F_j} & \text{se } F_j \neq 0_V \\ 0 & \text{se } F_j = 0_V. \end{cases}$$

L'insieme $\{F_1, \dots, F_n\}$ è ortogonale e se togliamo i vettori nulli otteniamo una base di $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

• **Es**: Determinare una base ortogonale di

$$\langle v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Sol.:

$F_1 = v_1 \neq 0_V$

$$F_2 = v_2 - \alpha_{12} F_1 = v_2 - \frac{2}{3} F_1 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ -1 \\ 1/3 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^4}$$

$$F_2 \cdot F_2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}(4+1+9+1) = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

$$F_3 = v_3 - \alpha_{13} F_1 - \alpha_{23} F_2 =$$

$$= v_3 - \frac{7}{3} F_1 - \frac{-\frac{2}{3}+1+2+1}{\frac{5}{3}} F_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{7}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{10}{5} F_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{7}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ -1 \\ 1/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{7}{3} + \frac{4}{3} = 0 \\ 3 - \frac{7}{3} - 2/3 = 0 \\ -2 + 2 = 0 \\ 3 - \frac{7}{3} - \frac{2}{3} = 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^4}$$

$$F_4 = v_4 - \alpha_{14} F_1 - \alpha_{24} F_2 = v_4 - \frac{2}{3} F_1 - \frac{\left(-\frac{4}{3}\right)}{\frac{5}{3}} F_2 =$$

$$= v_4 - \frac{2}{3} F_1 + \frac{4}{5} F_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \cancel{0_{\mathbb{R}^4}}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortogonale.